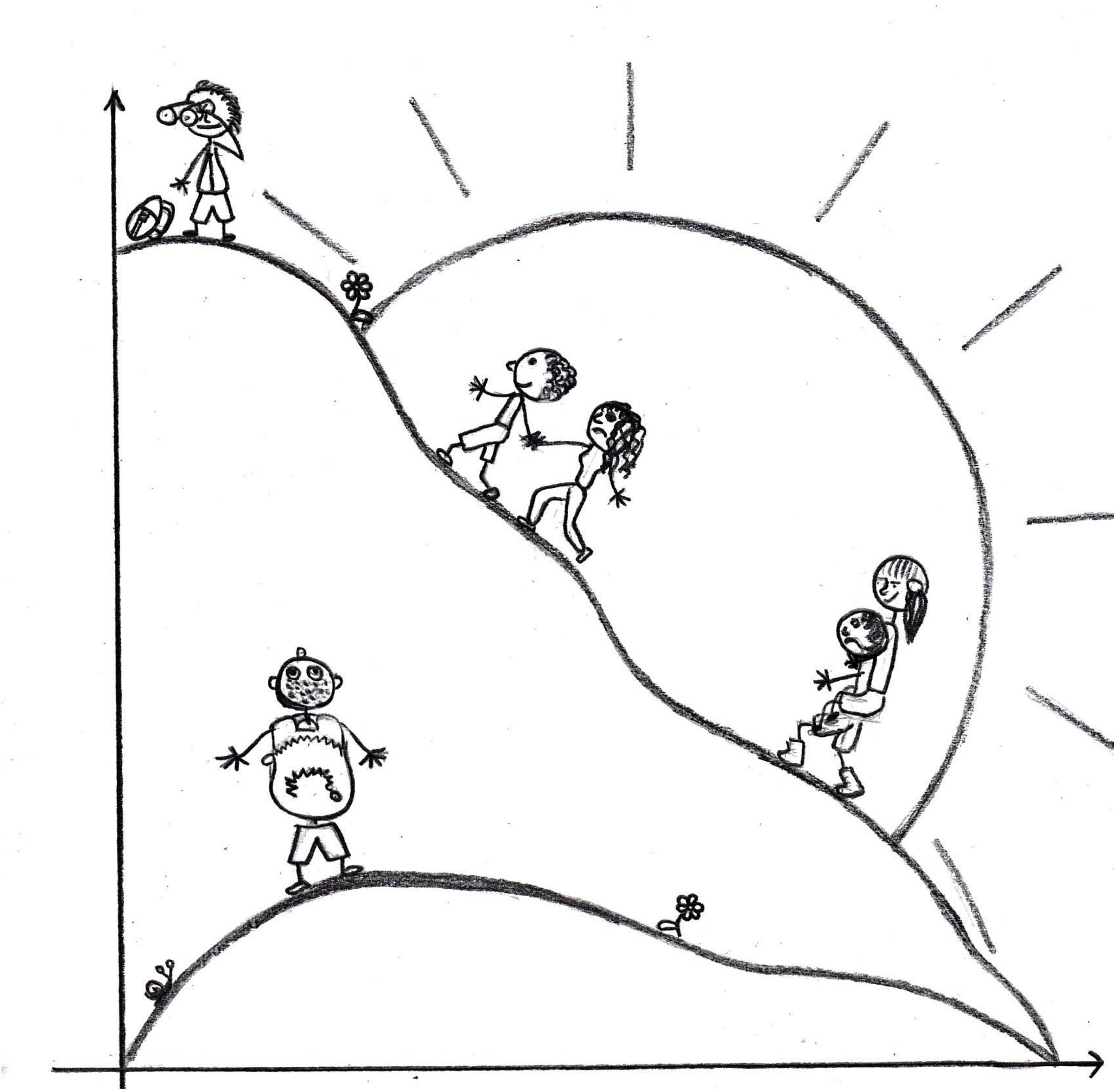
KOREŠPONDENČNÝ MATEMATICKÝ SEMINÁR

# MATIK

ČÍSLO **2** — ROČNÍK **25** INTERNET http://matik.strom.sk



# *Ahojte!*

Kde bolo tam bolo, boli raz vedúci MATIKa, ktorí vytvorili úplne nové číslo. Toto číslo bolo odlišné od všetkých doposiaľ známych čísel. Pri pozornom skúmaní tohto čísla objavíte vzorové riešenia prvej série, zadania druhej série, či poradie zobrazujúce, ako sa riešitelia popasovali s úlohami z predošlého čísla. Nezabúdajte, že je tu druhá a posledná šanca premiešať celkové poradie a dostať sa tak medzi najlepších, ktorí dostanú možnosť zúčastniť sa na nezabudnuteľnom sústredení. Ak ešte stále rozmýšľate nad tým, čo je zač to nové číslo, pozrite sa lepšie, do čoho ste sa práve začítali... Keď to už viete, tak vám prajeme príjemné chvíle strávené s ním.

Váš MATIK

# *Ako bolo...*

### *Výlet*

Poslednú septembrovú sobotu núdza o zábavu rozhodne nebola. Tí, ktorí ste nesedeli doma a šli s nami na výlet, určite neľutujete. Našu cestu sme začali v Margecanoch, kam sme sa z Košíc odviezli vlakom. Odtiaľ sme sa pešo prešli na Plejsy. Na začiatku sme trochu blúdili a keď sme si už mysleli, že sme na správnej ceste, našli sme sa v budúcnosti. Neboli sme tam však sami, stretli sme viacero známejších aj menej známych osobností z minulosti aj súčasnosti. Nakoniec sa nám s nimi podarilo spriateliť, pomôcť im a spoločnými silami sme sa vrátili naspäť do súčasnosti.

# *Ako bude*

### *Lomihlav*

Aj tento rok sa v novembri je na čo tešiť. Tradične sme pre vás usporiadali súťaž Lomihlav pre štvorčlenné tímy. Tento rok sa bude konať v piatok 25.11.2011 v CVČ Domino na Popradskej ulici v Košiciach.

Ako mnohí vedia, zúčastniť sa môžu štvorice žiakov rovnakej školy, od siedmakov po deviatakov, resp. od sekundy po kvartu. Na súťaži ich potom čakajú príklady, hlavolamy a hádanky, ktoré musia za 66 minút vyriešiť čo najlepšie. Odmenou im býva dobrý pocit a tým najlepším aj vtipné i užitočné vecné ceny a účasť na sústredení. Tento rok bude Lomihlav obohatený aj o skvelú hru na odreagovanie, ktorá bude po rátacej časti.

Ak ešte vaše družstvo nie je prihlásené a chceli by ste ísť, spýajte sa vášho učiteľa matematiky. Všetky potrebné informácie nájdete na matik.strom.sk/lomihlav.php.

# Vzorové riešenia 1. série úloh

## 1

opravovali **Deniska Semanišinová** a **Dano Till**

najkrajšie riešenie: Petra Plšková, Juraj Mičko

68 riešení

***Zadanie:*** Máme 40 tričiek. Rozdeľte ich na 4 kôpky tak, aby boli splnené nasledovné podmienky:

- V každej kôpke musí byť iný počet tričiek.
- V žiadnej kôpke nesmie byť rovnaký alebo väčší počet tričiek ako v dvoch iných kôpkach spolu.
- V prvej kôpke musí byť o sedem tričiek viac ako v druhej kôpke.
- V tretej kôpke musí byť o tri tričká viac ako vo štvrtej.
- Rozdiely počtov tričiek medzi všetkými dvojicami kôpok musia byť rôzne.

Nájdite všetky možnosti.

***Riešenie:*** Všimnime si, že ak určíme počet tričiek na jednej kôpke, tak nám to presne určí aj počty tričiek na zvyšných kôpkach. Ak napríklad určíme počet tričiek na prvej kôpke, vieme, že na druhej kôpke musí byť o 7 tričiek menej, na tretiu a štvrtú kôpku už len rozdelíme zvyšné tričká tak, aby platilo, že na tretej kôpke je o 3 tričká viac ako na štvrtej. Pomocou počtu tričiek v prvej kôpke teda vieme vyjadriť počty vo všetkých ostatných kôpkach, takže to urobme.
Označme $x$ počet tričiek v prvej kôpke. V druhej kôpke je potom $x - 7$ tričiek, čiže v prvých dvoch kôpkach je ich dokopy $2x - 7$. Navyše všetkých tričiek je dokopy 40, takže v tretej a štvrtej kôpke je spolu $40 - (2x - 7) = 40 - 2x + 7 = 47 - 2x$ tričiek.
Ostáva nám $47 - 2x$ tričiek, ktoré majú byť v tretej a štvrtej kôpke tak, že v tretej je ich o 3 viac. Ako by sme však nejakú kôpku rozdelili na dve časti tak, aby v jednej bolo o 3 tričká viac ako v druhej? Veľmi jednoducho, keďže by sme najprv dali 3 tričká do prvej časti a zvyšok už rozdelili na polovicu.
Do tretej kôpky teda dáme najprv 3 tričká a zvyšuje sa $44 - 2x$ tričiek. Keď tento zvyšok rozdelíme na polovicu, tak máme $22 - x$ tričiek, teda v tretej kôpke je ich $3 + (22 - x) = 25 - x$ a v štvrtej kôpke $22 - x$.
Počty tričiek v jednotlivých kôpkach teda sú:

- Prvá kôpka: $x$ tričiek
- Druhá kôpka: $x - 7$ tričiek
- Tretia kôpka: $25 - x$ tričiek
- Štvrtá kôpka: $22 - x$ tričiek

V každej kôpke je samozrejme od 0 do 40 tričiek, čiže stačí nám teraz za $x$ dosadiť čísla od 0 do 40 a overiť všetky možnosti. Nám sa však nechce dosadzovať až 41 možností, a tak skúsime nejaké vylúčiť.
V zadaní máme ešte podmienku, že v žiadnej kôpke nesmie byť rovnaký alebo väčší počet tričiek ako v dvoch iných kôpkach spolu. Všimnime si, že v druhej

a štvrtej kôpke je spolu $(x-7)+(22-x) = 15$ tričiek. Zo spomínanej podmienky tým pádom vieme, že v prvej aj tretej kôpke musí byť menej ako 15 tričiek.
V prvej kôpke je však $x$ tričiek, čiže $x$ musí byť menej ako 15.
V tretej kôpke je $25-x$ tričiek. Pokiaľ by $x$ bolo menšie alebo rovné 10, tak v tejto kôpke by sme mali aspoň $25-10 = 15$ tričiek, čo opäť nevyhovuje. Tým pádom $x$ musí byť viac ako 10 tričiek.
Zistili sme teda, že $x$ je menej ako 15, avšak väčšie ako 10, čiže nám už ostávajú iba 4 možnosti, a to 11, 12, 13 a 14. Toľko možností už nie je problém vyskúšať:

- ak $x = 11$, tak počty tričiek v jednotlivých kôpkach sú 11, 4, 14 a 11. V prvej a štvrtej kôpke je rovnaký počet tričiek, čiže táto možnosť nevyhovuje.
- ak $x = 12$, tak počty tričiek v jednotlivých kôpkach sú 12, 5, 13 a 10. Takéto rozmiestenie naozaj spĺňa všetky podmienky zadania, čiže vyhovuje.
- ak $x = 13$, tak počty tričiek v jednotlivých kôpkach sú 13, 6, 12 a 9. Tu však neplatí podmienka, že rozdiely počtov tričiek medzi všetkými dvojicami kôpok musia byť rôzne, keďže $12-9 = 9-6 = 3$. Táto možnosť teda nevyhovuje.
- ak $x = 14$, tak počty tričiek v jednotlivých kôpkach sú 14, 7, 11 a 8. Opäť tu neplatí podmienka, že rozdiely počtov tričiek medzi všetkými dvojicami kôpok musia byť rôzne, keďže $14-11 = 11-8 = 3$. Táto možnosť teda nevyhovuje.

Po overení všetkých štyroch možností sme zistili, že jediné správne riešenie je:

- Prvá kôpka: 12 tričiek
- Druhá kôpka: 5 tričiek
- Tretia kôpka: 13 tričiek
- Štvrtá kôpka: 10 tričiek

**Komentár.** Najčastejším nedostatkom bolo, že ste len vypísali možnosti a otestovali, či platia podmienky, avšak vôbec ste sa nesnažili počet možností obmedziť podmienkami. Taktiež niektorí ste napísali výsledok a overili ho podmienkami, ale vôbec ste neukázali, že iné riešenie nie je. Zvyšné chyby boli väčšinou ojedinelé.

## 2

opravovali **Maťa Jesenská** a **Miro Stankovič** — 40 riešení

najkrajšie riešenia: Ján Michalov, Dávid Bodnár, Žaneta Semanišinová

***Zadanie:*** Tóno, Džou a Bill maľujú plot. Plot bude natretý, keď Tóno a Džou budú pracovať 4 hodiny a Bill 2 hodiny, alebo ak Tóno a Džou budú pracovať 2 hodiny a Bill 5 hodín, alebo ak Tóno bude pracovať 6 hodín, Džou 2 hodiny a Bill 1 hodinu. Ako dlho by trvalo každému z nich, keby mal plot natierať úplne sám?

***Riešenie:*** Zo zadania vieme, že plot natrú, keď Tóno a Džou pracujú 4 hodiny a Bill pracuje 2 hodiny, alebo Tóno a Džou 2 hodiny a Bill 5 hodín. Keď porovnáme prvú a druhú informáciu, vidíme, že 2 hodiny spoločnej práce Tóna a Džoua sa vyrovnajú 3 hodinám práce Billa. Keby Bill zastúpil Tóna s Džouom na ďalšie 2 hodiny, pracoval by 8 hodín, celý čas sám. Bill by teda natrel plot sám za 8 hodín.

Plot natrú aj keď bude Tóno natierať 2 hodiny, Džou tiež 2 hodiny a Bill 5 hodín, alebo Tóno 6 hodín, Džou 2 hodiny a Bill 1 hodinu. V oboch týchto prípadoch pracuje Džou 2 hodiny, natrie preto rovnakú časť plota.
Tóno natiera v druhom prípade o 4 hodiny viac a Bill o 4 hodiny menej ako v prvom prípade. 4 hodiny práce Tóna sa teda vyrovnajú 4 hodinám práce Billa, čiže Bill a Tóno pracujú rovnako rýchlo, takže Tóno tiež natrie plot sám za 8 hodín.
Plot natrú, keď Tóno a Džou pracujú 4 hodiny a Bill pracuje 2 hodiny. Tóno natrie za 8 hodín celý plot, čiže za 4 hodiny natrie polovicu plota. Rovnako aj Bill natrie celý plot za 8 hodín, za dve hodiny preto natrie štvrtinu plota. Ostáva štvrtina plota, ktorú natrie Džou za 4 hodiny, takže celý plot by sám natrel za $4 \cdot 4 = 16$ hodín.
Ukázali sme teda, že Tóno by natrel plot sám za 8 hodín, Bill tiež za 8 hodín a Džou za 16 hodín.

**Komentár.** Niektorí z vás úlohu riešili tak, že informácie zo zadania zapísali do rovníc. Takto vám vznikla sústava 3 rovníc s 3 neznámymi, ktorú ste dokázali vyriešiť niektorou zo známych metód. (Tí, ktorí tieto metódy ešte nepoznáte, nebojte sa, neskôr sa s nimi v škole stretnete.) Pri tomto spôsobe riešenia je veľmi dôležité na začiatku uviesť, čo znamenajú jednotlivé neznáme, ktoré vo vašich rovniciach vystupujú. Na to ste však mnohí zabudli. Ak ste pri tomto riešení dospeli k nejakému záveru, je tiež vhodné, aby ste aj slovne popísali, čo dané rovnice znamenajú pre našu úlohu.

## 3 opravovala **Dáša Krasnayová**

najkrajšie riešenia: Petra Plšková, Zoltán Hanesz

67 riešení

***Zadanie:*** V kaviarni U mokrého lososa sedávalo 12 modelov. Do kaviarne prichádzali postupne po jednom. Vždy, keď niektorý z nich prišiel, podal ruku všetkým pri svojom stole. Nájdite všetky možnosti koľko tam mohlo byť stolov a koľko modelov sedelo pri každom z nich, ak si dokopy podali ruky 19-krát? (Od stolov odišli všetci naraz až po týchto podaniach rúk.)

***Riešenie:*** Najprv zistíme, koľko bude podaní rúk pri nejakom stole, a to podľa toho, koľko modelov pri ňom sedí. Zistíme to jednoducho, ak si predstavíme, ako postupne prichádzajú. Potom nám vyjdú takého počty podaní rúk:

• ak pri stole sedí model sám, nepodá si ruku s nikým – 0 podaní rúk

• ak pri stole sedia dvaja, keď príde druhý, podá ruku prvému (0+1) – 1 podanie rúk

• ak sú traja, k dvom, čo tam sú, pribudne tretí a podá im ruku (0+1+2) – 3 podania rúk

Takto keď pokračujeme a počítame ďalej, vyjde nám, že keď sú štyria, podaní rúk je 6, piati – 10, šiesti – 15, siedmi – 21. Tu sa však zastavíme, keďže to prevyšuje zadaný počet podaní rúk. Vieme teda, že pri každom stole sedí maximálne 6 modelov.

Teraz zo zistených hodnôt skúsme vyskladať takú kombináciu, aby sedel počet modelov aj podaní rúk zo zadania.
Začneme prípadom, ak pri najpočetnejšom stole sedí šesť modelov. Od počtu modelov teda odrátame 6 a od počtu podaní rúk 15. Ostáva nám šesť modelov a majú si podať ruky už iba 4-krát. Pokiaľ by sme mali pri každom ďalšom stole menej ako troch modelov, tak by sme nemohli dosiahnuť až 4 podania rúk (najviac by to bolo, keby boli stoly po dvoch, a teda 3 podania rúk). Väčšie stoly ako s tromi modelmi už tiež nemôžeme mať, keďže už by sme mali priveľa podaní rúk. Pri niektorom stole teda museli sedieť práve traja modeli.
Ostávajú nám ešte traja modeli a 1 podanie rúk. Tu už máme zjavne iba jednu možnosť a to usadiť ich k ďalším dvom stolom – k jednému dvoch a druhému jedného modela. Takto sme overili všetky možnosti, kedy máme stôl so šiestimi modelmi.
Ďalej poďme uvažovať, že pri najpočetnejšom stole je päť modelov. Od počtu modelov odrátame 5 a od počtu podaní rúk 10, čiže nám ostáva sedem modelov a 9 podaní rúk. Podaní rúk je viac ako modelov, preto si môžeme všimnúť, že musíme použiť stôl so štyrmi modelmi. Totižto ak by sme používali iba menšie stoly, vieme dosiahnuť iba menej (alebo rovnako) podaní rúk oproti počtu modelov, a pri použití väčšieho stola by sme už opäť mali priveľa podaní rúk.
Po usadení týchto štyroch nám ostávajú traja modeli a tri podania rúk. To je presne jeden stôl s tromi modelmi – máme teda ďalšiu vyhovujúcu možnosť.
Ak by sme tých posledných troch usadili inak, dostaneme menej ako tri podania rúk, takže iná možnosť v tomto prípade už nie je.
Teraz uvažujme, že pri najväčšom stole sú štyria. Aj keby pri každom stole sedeli štyria, mali by sme iba tri stoly po 6 podaní rúk, čo je dokopy iba 18. Ak by boli stoly ešte menšie, všimneme si, že počet podaní rúk by iba klesal. Preto už ďalšie možnosti nevyhovujú.
Máme teda dokopy dve vyhovujúce možnosti, a to štyri stoly po 6, 3, 2, 1 modelov alebo tri stoly po 5, 4, 3 modelov.

**Komentár.** K tejto úlohe nám prišlo veľmi veľa riešení so správnym výsledkom. Ťažšie však bolo odôvodniť, že viac vyhovujúcich možností už nie je. Okrem vyššie uvedeného odôvodnenia boli aj iné spôsoby riešenia a to napríklad rozpisovaním všetkých možností, ako možno rozdeliť číslo 19 alebo 12, teda počet podaní rúk alebo modelov. V tomto prípade ale treba nájsť naozaj všetky možnosti, ako sa to dá, inak sa to nedá považovať za kompletné odôvodnenie toho, že iné možnosti nevyhovujú.

## 4

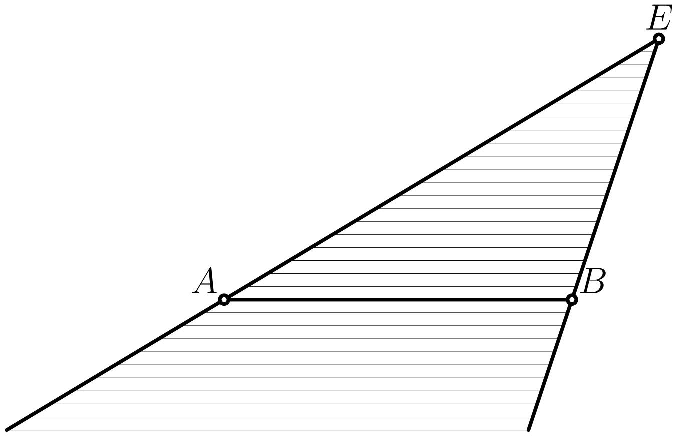
opravovali **Matúš Hlaváčik** a **Robko Hajduk**

najkrajšie riešenie: Henrieta Micheľová, Soňa Feciskaninová

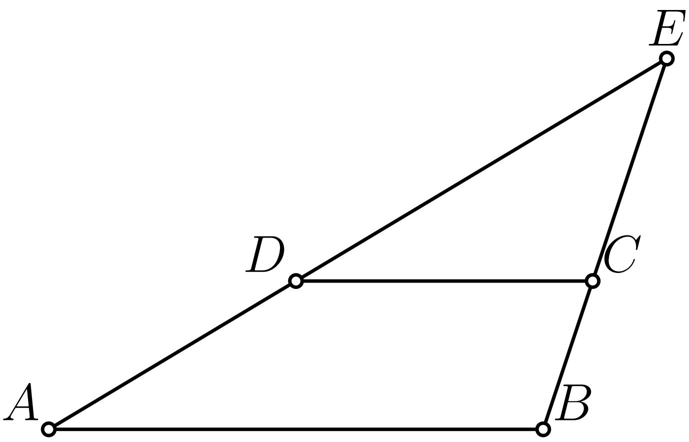
54 riešení

***Zadanie:*** Pancier Elenky je lichobežník $ABCD$ taký, že $AB \parallel CD$ a $|AB| > |CD|$. Zdôvodnite, prečo je súčet vnútorných uhlov pri základni $CD$ väčší ako súčet vnútorných uhlov pri základni $AB$.

***Riešenie:***
Pozrime sa na lichobežník *ABCD* zo zadania. Vieme, že základňa *AB* je väčšia ako základňa *CD*. Keďže nie sú rovnako dlhé, tak sa polpriamky *AD* a *BC* pretnú v bode *E*. Ak by boli rovnako dlhé, tak *ABCD* by bol rovnobežník a priamky *AD* a *BC* by sa nikdy nepretli. Pozrime sa teraz, ako môže vyzerať naša situácia po zostrojení bodu *E*. Úsečka *AB* a bod *E* tvoria trojuholník, ako je to znázornené na nasledujúcom obrázku.




Úsečku *CD* sme zatiaľ na obrázku neznázornili. Kde sa môže nachádzať? Ako si môžeme všimnúť, na obrázku sú znázornené aj niektoré rovnobežky so stranou *AB*, ktoré majú koncové body na priamkach *BE* a *AE*. Úsečka *CD* musí byť tiež rovnobežná s úsečkou *AB* a mať koncové body na priamkach *BE* a *AE*, pretože bod *E* vznikol tak, že leží súčasne na priamke *AD* a priamke *BC*. Teraz si už len stačí uvedomiť, že na to, aby úsečka *CD* bola kratšia ako úsečka *AB*, musí ležať vo vnútri trojuholníka *ABE*, ako je to znázornené na nasledujúcom obrázku.




Teraz už máme všetko potrebné na dôkaz tvrdenia zo zadania. V trojuholníku *ABE* je súčet vnútorných uhlov $180°$. Uhol pri vrchole *E* má nejakú nenulovú veľkosť, a preto súčet veľkostí uhlov pri vrcholoch *A* a *B* musí byť menej ako $180°$. Súčet vnútorných uhlov v lichobežníku *ABCD* je $360°$. Pred chvíľou sme si ale ukázali, že súčet uhlov pri vrcholoch *A* a *B* je menší ako $180°$, a preto súčet uhlov pri vrcholoch *C* a *D* musí byť viac ako $180°$, keďže spolu dávajú $360°$. Tým sme tvrdenie zo zadania dokázali.

**Komentár.** Mnohí z vás si myslia, že lichobežník môže mať pri dlhšej základni len ostré uhly. Na obrázku je ale znázornený aj lichobežník s tupým uhlom pri základni

*AB*. O niekoľko bodov ste prišli aj za tvrdenia bez dôkazov, ktoré neboli úplne zrejmé. Preto vás chceme poprosiť, aby ste to nabudúce viac okomentovali, aby sme vedeli posúdiť, či je riešenie správne alebo nie.

## 5 opravovali **Maťo Rapavý** a **Robčo Tóth**

najkrajšie riešenie: Patrik Hohoš

47 riešení

***Zadanie:*** Máme 111 sumčekov. Sumček môže byť pod vodou alebo nad vodou. V jednom ťahu môžeme zmeniť polohu **presne** 13 spomedzi nich (napríklad vynoríme 9 ponorených sumčekov a ponoríme 4 vynorených sumčekov).

• Koľko najmenej ťahov je potrebných na ponorenie všetkých sumčekov, ak na začiatku sú všetci sumčekovia nad vodou?

• Na začiatku je niekoľko sumčekov nad vodou a ostatní sú pod vodou (neviete, koľko presne). Dajú sa vždy ponoriť všetci sumčekovia?

***Riešenie:*** Pozrime sa na to, ako sa nám mení situácia v jednom ťahu. Všetky možnosti na zmenu počtu vynorených a ponorených sumčekov sú znázornené v nasledujúcej tabuľke.

| | Vynorím | Ponorím | Zmena |
|---|---|---|---|
| *A* | 13 | 0 | −13 |
| *B* | 12 | 1 | −11 |
| *C* | 11 | 2 | −9 |
| *D* | 10 | 3 | −7 |
| *E* | 9 | 4 | −5 |
| *F* | 8 | 5 | −3 |
| *G* | 7 | 6 | −1 |
| *H* | 6 | 7 | +1 |
| *I* | 5 | 8 | +3 |
| *J* | 4 | 9 | +5 |
| *K* | 3 | 10 | +7 |
| *L* | 2 | 11 | +9 |
| *M* | 1 | 12 | +11 |
| *N* | 0 | 13 | +13 |

Ďalej budeme využívať to, že máme označené jednotlivé možnosti na ponorenie a vynorenie sumčekov. Napríklad namiesto toho, aby sme hovorili, že vynoríme nejakých sedem sumčekov a ponoríme nejakých šesť sumčekov, budeme písať len, že urobíme ťah *G*, v ktorom sa robí presne to, čo potrebujeme. Stačí si to overiť v predchádzajúcej tabuľke. Keď budeme chcieť napísať viac ťahov po sebe, budeme jednoducho písať napríklad *GIL*, čo bude znamenať, že urobíme najskôr ťah *G*, potom ťah *I* a nakoniec ťah *L*.

Pri riešení časti a) sa dá jednoducho dospieť k tomu, ako sumčekov ponoriť na deväť ťahov. Ide to napríklad použitím ťahov *NNNNNNNKN*. Skúste si to. Teraz treba ukázať, že na menej ťahov to naozaj nejde. V jednom ťahu vieme ponoriť maximálne 13 sumčekov, a teda v ôsmich ťahoch maximálne $8 \cdot 13 = 101$ sumčekov. Vynorených sumčekov je ale na začiatku viac, teda potrebujeme aspoň deväť ťahov.

V časti b) máme ľubovoľný počet vynorených sumčekov. Môžeme opakovať ťah $N$, až kým nám neostane počet vynorených sumčekov menší ako 13. Napríklad, ak je ich na začiatku vynorených 80, vieme tento problém previesť na ponorenie 2 sumčekov. Stačí nám teda overiť, že sa dá ponoriť každý počet sumčekov od 0 do 12. To sú všetky čísla menšie ako 13. V nasledujúcej tabuľke sú zaznačené spôsoby, ako sa dajú ponoriť sumčekovia, keď ich je menej ako 13.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | *GN* | 8 | *EN* | 4 | *CN* |
| 11 | *AMN* | 7 | *AKN* | 3 | *AIN* |
| 10 | *FN* | 6 | *DN* | 2 | *BN* |
| 9 | *ALN* | 5 | *AJN* | 1 | *AHN* |

Týmto sme dokázali aj časť b) úlohy.

**Komentár.** Za prvú časť sme udeľovali 5 bodov a za druhú 4 body. Dva body ste mohli získať za to, ak ste uviedli spôsob, akým to ide na deväť ťahov a ďalšie tri za to, ak ste ukázali, že na menej ťahov sa to naozaj nedá. V druhej časti sme udeľovali dva body za to, že ste prišli na spôsob, akým sa dá zmeniť poloha iba jedného sumčeka (1. typ riešení), prípadne za skresanie úlohy len na dvanásť prípadov (2. typ riešení) - ako vo vzorovom riešení. Ďalšie dva body potom boli za ošetrenie prípadov, keď sa váš spôsob nedal použiť (1. typ riešení), respektíve za uvedenie potrebných ťahov pre tých dvanásť prípadov (2. typ riešení).

Radi by sme vám do budúcnosti poradili, čo robiť, ak máte nájsť spôsob, akým niečo ide na najmenej ťahov. Takéto úlohy sú väčšinou dvojfázové. Najprv sa s ňou trošku pohráte, utvoríte si názor, že to bude napríklad 15. Potom samozrejme treba uviesť do riešenia konkrétny spôsob, akým to ide - ako v našom vzorovom riešení. Ak chcete ukázať, že to je naozaj najmenej, vyvarujte sa odôvodneniam typu: „Robil som, čo som mohol, dokonca to podľa mňa boli najlepšie kroky, čo sa dali a tým pádom to je najmenej“ . Skôr sa skúste zamyslieť, čo sa stane, ak by som sa to pokúsil spraviť na menej krokov a ukázať, kde konkrétne to zlyhá v takom prípade - ako vo vzorovom riešení.

## 6

opravovali **Ivka Gašková** a **Maťo Vodička**

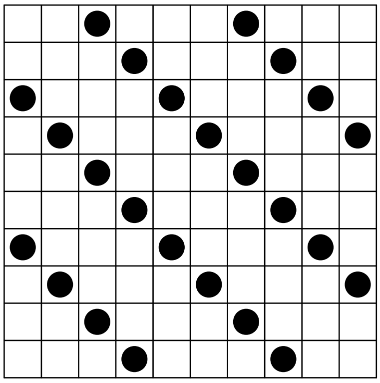
najkrajšie riešenia: Samuel Krajči, Šimon Soták

49 riešení

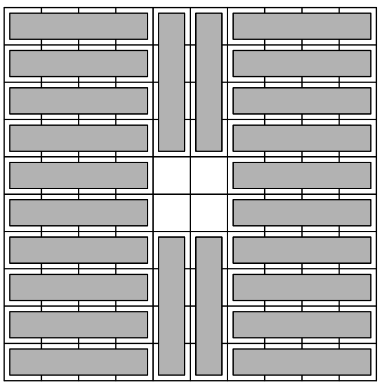
***Zadanie:*** Na hracom pláne $10 \times 10$ sa hráva hra s názvom námorná vojna. Na nej je umiestnená štvorpolíčková loď $4 \times 1$ tak, aby zakryla presne 4 políčka plánu. Jedným výstrelom vždy zasiahneme práve jedno vybrané políčko. Loď je trafená práve vtedy, keď je výstrelom zasiahnuté aspoň jedno z políčok, ktoré zakrýva. Aký najmenší počet výstrelov treba na to, aby bola loď určite trafená, aj keď jej polohu nepoznáme? (Ukážte, akým spôsobom majú byť rozložené výstrely a zdôvodnite, že pri menšom počte výstrelov sa dá loď vždy umiestniť tak, aby nebola zasiahnutá.)

***Riešenie:***

Našou úlohou je na čo najmenej výstrelov určite trafiť loď. Samozrejme nebudeme strieľať bezhlavo. Budeme strieľať tak, aby sa medzi výstrely loď $4 \times 1$ nezmestila. Keďže loď môže byť aj vodorovne aj zvislo, po pár pokusoch prídeme na to, že asi najvýhodnejšie bude strieľať po uhlopriečkach. Keďže loď má 4 políčka, stačí vystrieľať každú štvrtú uhlopriečku, ako je to znázornené na obrázku. Ako si môžeme všimnúť, žiadna loď by sa medzi výstrely nevošla, pretože na celom pláne sú maximálne tri netrafené políčka po sebe v rade alebo stĺpci. Preto vieme, že ak budeme strieľať, ako sme to znázornili na obrázku, určite trafíme loď, nech by bola kdekoľvek, a preto vieme, že 24 výstrelov nám bude určite stačiť na potopenie lode.



Takže vieme, že 24 výstrelov nám stačí na trafenie lode. Dá sa to aj na menej? To sme zatiaľ nedokázali a preto sa na to poďme pozrieť. Po dlhšom skúšaní by sme mohli prísť na to, že nech sa akokoľvek snažíme a umiestňujeme 23 výstrelov, stále ostane miesto pre nejakú loď, ktorú by sme na plán vedeli umiestniť bez toho, aby bola zasiahnutá. Poďme si teda dokázať, že ak použijeme menej výstrelov ako 24, tak sa nám nemusí podariť trafiť loď. Skúsme preto do štvorca $10 \times 10$ umiestniť neprekrývajúce sa lode $4 \times 1$. Bez problémov sa ich tam zmestí 24, ako je to na nasledujúcom obrázku.



Ak teraz skúsime umiestniť výstrely na plán, zistíme, že jedným výstrelom vieme trafiť maximálne jednu loď. Preto ak použijeme menej ako 24 výstrelov, ostane nejaká loď, ktorá nie je zasiahnutá. Preto vieme, že na menej ako 24 výstrelov sa nám nemusí podariť trafiť loď, ktorá je na pláne. Na začiatku sme si už ukázali, že 24 výstrelov stačí na trafenie lode a teraz sme si ukázali, že na menej ako 24 výstrelov nemusíme trafiť loď. Preto odpoveď na otázku zo zadania je 24 a rozmiestnenie striel je znázornené na prvom obrázku.

**Komentár.** Veľa z vás prišlo na riešenie s 24 výstrelmi, no už menej z vás sa zamýšľalo nad tým, že či to na menej výstrelov nejde. To je v úlohách tohto typu dôležité. Do budúcnosti treba v takých úlohách okrem toho „najlepšieho" riešenia aj dokázať, prečo je najlepšie a keď už to dokazujete, musí to byť všeobecné. Nie napríklad, že keď odstránim výstrel, už sa tam zmestí loď, lebo to platí len pre to jedno vaše rozmiestnenie výstrelov. A intuícia je fajn vec ako prísť na to najlepšie riešenie, no je nevhodná pri dôkaze, že to je najlepšie riešenie (napr. že je jasné, že musíme strieľať po uhlopriečkach).

# Zadania 2. série úloh

Úlohy pošlite najneskôr **21. novembra 2011**

Tieto úlohy aj s príbehom nájdete na stránke *http://matik.strom.sk/zadania.php*, alebo v minulom čísle vášho časopisu.

**Úloha 1.** *Kusov jedla bolo nakoniec presne 100. Tóno očísloval kusy jedla postupne číslami 1 až 100 a potom sa ich snažil rozdeliť na 2 časti – jedna preňho a druhá pre jeho milovanú – tak, aby sa rozdiel žiadnych dvoch čísel z jednej skupiny nenachádzal v tej istej skupine. Vie jedlo takto rozdeliť?*

**Úloha 2.** *Makrely mali na brušku napísané prirodzené čísla. Makrela je šťastná práve vtedy, keď je ciferný súčet čísla na jej brušku deliteľný siedmimi. Môžu existovať dve šťastné makrely, ktoré majú na brušku napísané po sebe idúce čísla? Aké najmenšie čísla by mohli takéto dve makrely mať?*

**Úloha 3.** *Diera mala tvar pravidelného 9-uholníka ABCDEFGHI. Elenka však rátala so všetkým a vzala si so sebou krátku niť. Na to, aby sa Elenke podarilo zašiť dieru, potrebovala vedieť, aký uhol zvierajú priamky DG a BE. Vypočítajte veľkosť tohto uhla.*

**Úloha 4.** *„Rozpílime tú vašu drevenú kraksňu v tvare kocky s hranou dlhou 4 metre na 64 kociek s hranou dlhou 1 meter." Bez zmeny polohy rozpílených častí to vedia urobiť deviatimi rezmi. Koľko najmenej rezov by potrebovali piráti, ak by neboli hlúpi a prepílené časti by premiestňovali? Prečo to na menej rezov nevie urobiť nikto?*

**Úloha 5.** *„Stavím sa s vami o celú moju loď a môj holý život, že ak na tabuľu napíšeme čísla 1, 2, 3, . . . , 2012 a 2011-krát nahradíme dve čísla z tabule ich rozdielom, ostane jediné číslo, ktoré bude párne." Ukážte, prečo mal Tóno pravdu. Aké najväčšie číslo vieme takto na konci dostať?*

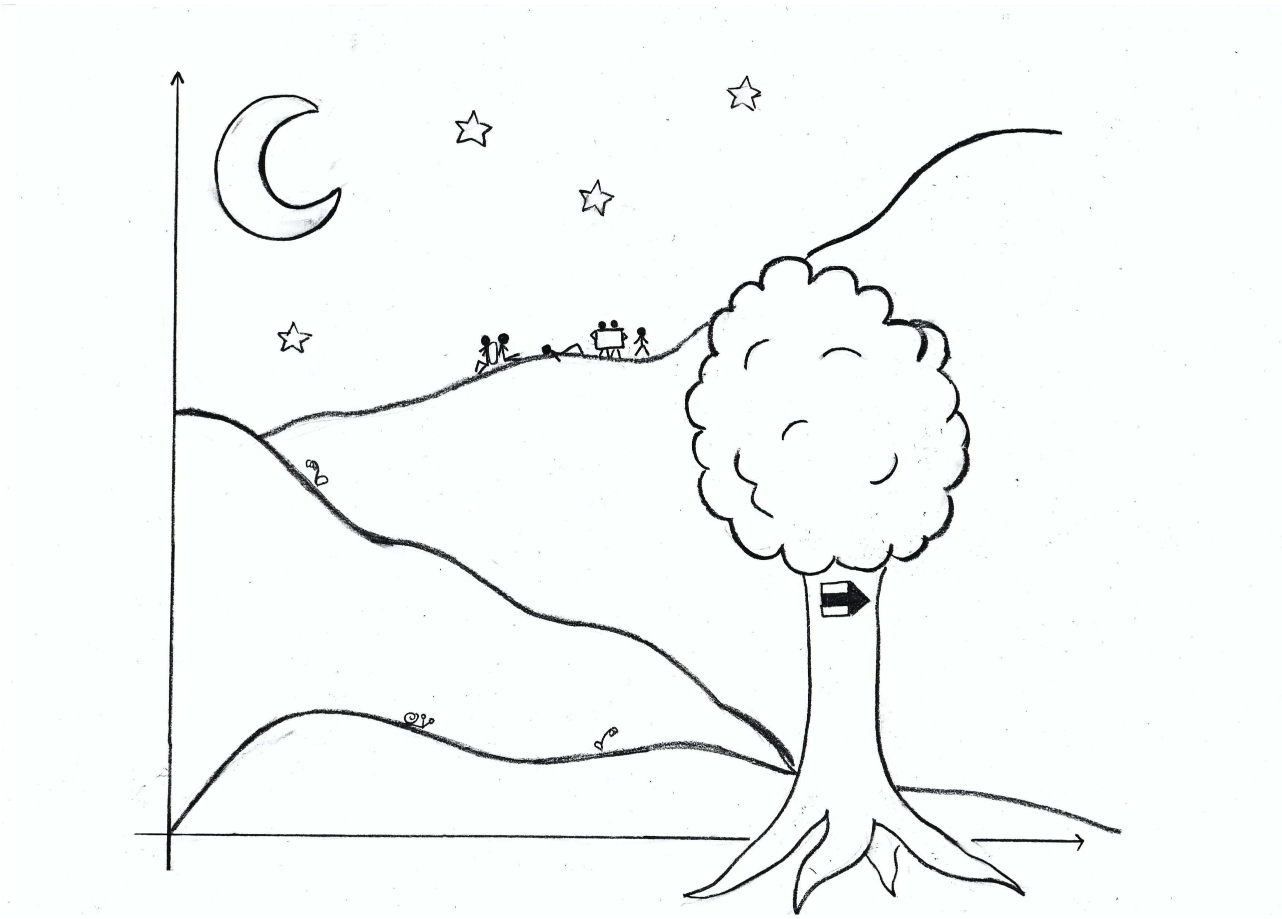
**Úloha 6.** *Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC sú v pomere 1 : 2 : 3 a najkratšia strana BC má dĺžku 1 cm. V akom pomere delí najdlhšiu stranu AB päta výšky z vrcholu C?*

# Poradie po 1.sérii

**PS** je súčet bodov za predchádzajúce série, **1–6** sú body za jednotlivé úlohy a **CS** je celkový súčet bodov.

| Poradie | Meno | Trieda | Škola | PS | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | PCS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Samuel Krajči | Prima | GAlejKE | 0 | 8 | 9 | 8 | 9 | 7 | 9 | 52 |
| 2. | Henrieta Micheľová | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 9 | 9 | 9 | 9 | 6 | 9 | 51 |
| 3. | Zoltán Hanesz | 8. A | ZKuzmKE | 0 | 9 | 9 | 9 | 9 | 7 | 5 | 50 |
| 4. | Soňa Feciskaninová | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 8 | 9 | 8 | 9 | 6 | 9 | 49 |
| 5. | Šimon Soták | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 7 | 7 | 8 | 9 | 6 | 9 | 46 |
| 6. – 7. | Kristína Mišlanová | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 3 | 9 | 9 | 9 | 9 | 6 | 45 |
| | Martin Masrna | 7. B | ZKro4KE | 0 | 8 | 8 | 8 | 7 | 3 | 6 | 45 |
| 8. | Dávid Bodnár | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 8 | 9 | 8 | 9 | 5 | 5 | 44 |
| 9. – 10. | Žaneta Semanišinová | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 3 | 9 | 9 | 9 | 7 | 6 | 43 |
| | Ivan Vanát | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 8 | 9 | 6 | 9 | 7 | 4 | 43 |
| 11. – 13. | Kristína Bratková | 7. A | ZKe30KE | 0 | 7 | 7 | 8 | 3 | 4 | 8 | 42 |
| | Matej Genči | 7. A | ZKro4KE | 0 | 4 | 6 | 9 | 9 | - | 5 | 42 |
| | Juraj Mičko | 8. B | ZKro4KE | 0 | 9 | 9 | 8 | 8 | 3 | 4 | 42 |
| 14. – 16. | Dávid Nguyen | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 9 | 9 | 6 | 9 | 3 | 5 | 41 |
| | Petra Plšková | 9. A | ZStarKE | 0 | 9 | 7 | 9 | 7 | 4 | 5 | 41 |
| | Jakub Genči | 8. A | ZKro4KE | 0 | 7 | 9 | 8 | 9 | 2 | 4 | 41 |
| 17. | Katarína Kuľková | 7. | ZSDrienov | 0 | 8 | 4 | 6 | 9 | 4 | 4 | 40 |
| 18. – 19. | Nikola Svetozarov | 7. B | ZKro4KE | 0 | 8 | - | 8 | 7 | 3 | 4 | 38 |
| | Tereza Volavková | 9. A | ZKro4KE | 0 | 3 | 9 | 9 | 9 | 4 | 4 | 38 |
| 20. – 21. | Natália Česánková | 7. A | ZHvieLY | 0 | 8 | 4 | 8 | - | 3 | 5 | 36 |
| | Slavomír Hanzely | Kvarta | GKomeSB | 0 | 1 | 9 | 8 | 9 | 4 | 5 | 36 |
| 22. – 24. | Patrik Hohoš | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 4 | 7 | 6 | 4 | 9 | 4 | 34 |
| | René Michal Cehlár | 9. A | ZKro4KE | 0 | 8 | 8 | 7 | - | 4 | 7 | 34 |
| | Tomáš Tóth | 7. A | ZKro4KE | 0 | 3 | 9 | 7 | 2 | - | 4 | 34 |
| 25. – 26. | Jakub Mach | 8. B | ZKro4KE | 0 | 6 | 9 | 8 | 2 | 2 | 6 | 33 |
| | Martin Majerčák | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 8 | 8 | 8 | 1 | 2 | 6 | 33 |
| 27. – 28. | Peter Čulen | 7. A | ZKro4KE | 0 | 0 | 9 | 7 | 2 | 2 | 3 | 32 |
| | Peter Onduš | Sekunda A | GAlejKE | 0 | 0 | 8 | 7 | 1 | 4 | 4 | 32 |
| 29. – 31. | Alžbeta Ivašková | 8. B | ZKro4KE | 0 | 2 | 9 | 9 | 2 | 3 | 5 | 30 |
| | Daniel Onduš | Kvarta A | GTr12KE | 0 | 0 | 8 | 8 | 7 | 3 | 4 | 30 |
| | Ján Michalov | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 9 | 9 | 4 | 2 | 2 | 4 | 30 |
| 32. | Juraj Jursa | Sekunda B | GAlejKE | 0 | 8 | 5 | - | 4 | 1 | 3 | 29 |
| 33. | Adam Õrhalmi | 9. A | ZKro4KE | 0 | 4 | 1 | 8 | 7 | 4 | 4 | 28 |
| 34. | Veronika Schmidtová | 8. B | ZKro4KE | 0 | 4 | 9 | 8 | 2 | 2 | - | 27 |
| 35. | Jakub Hlaváčik | Kvarta B | GAlejKE | 0 | 4 | 9 | 8 | - | - | 5 | 26 |
| 36. | Max Õrhalmi | Sekunda A | GAlejKE | 0 | 4 | - | 3 | 3 | 4 | 5 | 24 |
| 37. – 38. | Tara Stefányi | 9. A | ZKro4KE | 0 | 3 | 9 | 4 | 2 | - | 4 | 22 |
| | Lucia Hlaváčiková | 7. B | ZGemeKE | 0 | 4 | - | 8 | - | 2 | - | 22 |
| 39. | Roxana Rajtáková | 7. A | ZKro4KE | 0 | 4 | - | 5 | 2 | 2 | 3 | 21 |

| Poradie | Meno | Trieda | Škola | PS | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | PCS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40. | Alexandra Fabianová | 7. A | ZKro4KE | 0 | 8 | - | - | - | 0 | 4 | 20 |
| 41. – 42. | Michal Čabra | 7. B | ZŽdaňa | 0 | 2 | 1 | 5 | 2 | - | 4 | 19 |
| | Natália Tóthová | 7. B | ZKro4KE | 0 | 7 | - | 4 | 1 | - | - | 19 |
| 43. – 44. | Eduard Lavuš | 8. B | ZKro4KE | 0 | 1 | - | 7 | 9 | - | - | 17 |
| | Ivana Bernasovská | 8. B | ZKro4KE | 0 | 4 | - | 7 | 4 | 2 | - | 17 |
| 45. | Adam Kalivoda | 7. A | ZKro4KE | 0 | 1 | 1 | 4 | 2 | - | 4 | 16 |
| 46. | Anna Mária Kubincová | 7. C | ZNov2KE | 0 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 1 | 15 |
| 47. – 48. | Martina Horváthová | 8. B | ZKro4KE | 0 | 4 | - | 4 | 2 | 2 | - | 12 |
| | Lucia Lenártová | 9. A | ZPPapBJ | 0 | 4 | - | 5 | 2 | 1 | - | 12 |
| 49. – 54. | Adam Skybjak | 8. B | ZKro4KE | 0 | 7 | - | - | - | - | 4 | 11 |
| | Viktória Fenčáková | 7. B | ZKro4KE | 0 | 1 | - | 4 | 2 | - | 0 | 11 |
| | Daniel Koľ | 8. A | ZKro4KE | 0 | 4 | - | 7 | - | - | - | 11 |
| | Zuzana Nadzamová | 7. B | ZKro4KE | 0 | 3 | - | 3 | 2 | - | - | 11 |
| | Karin Brandeburová | 8. A | ZKro4KE | 0 | 4 | - | 7 | - | - | - | 11 |
| | Martin Zdravecký | 7. A | ZKro4KE | 0 | - | - | 4 | 2 | - | 1 | 11 |
| 55. – 56. | Dominik Stripan | 9. A | ZKro4KE | 0 | 4 | - | - | 1 | 5 | - | 10 |
| | Petra Demjanovičová | 7. A | ZBajkPO | 0 | 4 | - | 1 | 1 | - | - | 10 |
| 57. – 58. | Matej Dubinský | 7. A | ZKro4KE | 0 | - | - | 3 | 1 | - | 2 | 9 |
| | Jakub Ivanecký | 7. A | ZKro4KE | 0 | - | - | 4 | 1 | - | - | 9 |
| 59. – 60. | Roderik Horovský | 8. B | ZKro4KE | 0 | - | - | 2 | 2 | 4 | - | 8 |
| | Lucia Perešová | 8. A | ZKro4KE | 0 | 1 | - | 7 | - | - | - | 8 |
| 61. – 67. | Lenka Tomčíková | 9. A | ZPPapBJ | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 7 |
| | Richard Garlík | 8. A | ZKro4KE | 0 | - | 4 | 3 | - | - | - | 7 |
| | Samuel Oswald | 8. B | ZKro4KE | 0 | 1 | - | - | - | 2 | 4 | 7 |
| | Peter Poláček | 8. A | ZKro4KE | 0 | 4 | - | 3 | - | - | - | 7 |
| | Matej Repka | 9. B | ZNámePO | 0 | 2 | - | - | - | 4 | 1 | 7 |
| | Matej Kyjovský | 8. A | ZKro4KE | 0 | 4 | - | 3 | - | - | - | 7 |
| | Samuel Kurucz | 8. A | ZKro4KE | 0 | 4 | - | 3 | - | - | - | 7 |
| 68. | Matúš Labuda | Kvarta A | GAlejKE | 0 | 0 | - | 3 | 0 | 2 | 1 | 6 |
| 69. – 72. | Michal Štěpánek | 8. B | ZKro4KE | 0 | - | - | 4 | - | - | - | 4 |
| | Peter Fačko | 7. B | ZKro4KE | 0 | - | - | - | - | 2 | - | 4 |
| | Franklin Vaca Velásquez | 8. A | ZKro4KE | 0 | 1 | - | 3 | - | - | - | 4 |
| | Peter Vaňo | 8. A | ZKro4KE | 0 | 1 | - | 3 | - | - | - | 4 |
| 73. – 74. | Ivan Sivák | 8. A | ZKro4KE | 0 | 1 | - | 2 | - | - | - | 3 |
| | Jozef Kunc | 8. B | ZKro4KE | 0 | - | - | 3 | - | - | - | 3 |
| 75. | Lukáš Sabol | 8. A | ZKro4KE | 0 | 0 | - | - | 1 | - | - | 1 |
| 76. – 79. | Sofia Komlošová | 7. B | ZKro4KE | 0 | 0 | - | - | - | - | - | 0 |
| | Michal Lukáč | 7. A | ZKro4KE | 0 | - | - | - | - | - | - | 0 |
| | Veronika Mušinská | 7. B | ZKro4KE | 0 | - | - | - | - | - | - | 0 |
| | Laura Bodyová | 7. B | ZKro4KE | 0 | - | - | - | - | - | - | 0 |



**Za podporu a spoluprácu ďakujeme:**

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Korešpondenčný matematický seminár **MATIK**
Číslo 2 • Zimná časť 25. ročníka (2011/12) • Vychádza 3. novembra 2011
Internet: `http://matik.strom.sk` • E-mail: `matik@strom.sk`

**Vydáva:** Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice 1
Internet: `http://www.strom.sk` • E-mail: `zdruzenie@strom.sk`