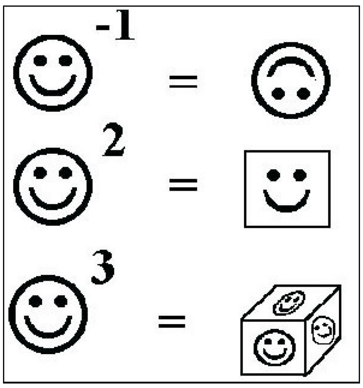
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte Stromáci,

sme veľmi radi, že sa vás tohto roku urodilo tak veľa. S každou obálkou sa naša radosť zväčšovala a verte, že sme tomu takí radi, že niektorí z nás vedúcich sa stále z toho nemôžu spamätať :-). Možno je to pre vás trochu horšie, lebo o sústredko sa rozpútal naozaj tuhý boj. Chceme, aby v ňom každý z vás obstál čo možno najlepšie, ale hlavné podľa nás je, aby ste pri riešení pocítili radosť z matematiky a mali z toho pekný zážitok. Nech vás neúspech neodrádza, ale naopak vyburcuje k ešte väčšej snahe príst na koreň problému. Ak si nebudete vedieť rady, nezúfajte. Nenecháme vás v tomto boji samých. Prichádzame vám na pomoc, a to už v sobotu 22. novembra. Budete mať možnosť vypočuť si na PF UPJS dva príbehy z ríše matematických zázrakov. Dúfame, že z nich načerpáte veľa inšpirácie a zistíte, že matematika vie byť niekedy krajšia ako sa na prvý pohľad zdá.

Vaši **STROM**isti

Pár myšlienok na zamyslenie

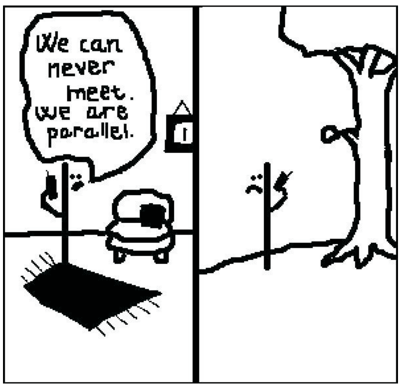


Spojte jednotlivé polovice výrokov tak, aby ste dostali päticu slávnych výrokov.

Láska je pre človeka zložitejšia ako matematika, ...
Pokiaľ sa matematické zákony vzťahujú na skutočnosť, ...
Prekážky ma nemôžu zlomiť. Každá prekážka ...
Matematik je ako slepý muž v tmavej miestnosti ...
Najpozoruhodnejšia na človeku ...

...vyžaduje len veľkú dávku odvahy. *Leonardo da Vinci*
...hľadajúci čiernu mačku, ktorá tam nie je. *Charles Darwin*
...často s neriešiteľnými príkladmi. *Albert Einstein*
...nie sú presné, pokiaľ sú však presné,
nevzťahujú sa na skutočnosť. *Albert Einstein*
...je jeho schopnosť myslieť. *Aristoteles*

Päť minút angličtiny



A woman in a bar tries to pick up a mathematician.
„How old, do you think, am I?“ she asks coyly.
„Well - 18 by that fire in your eyes, 19 by that glow on your cheeks, 20 by that radiance of your face, and adding that up is something you can probably do for yourself...“

Q: Why do you rarely find mathematicians spending time at the beach?
A: Because they have sine and cosine to get a tan and don't need the sun!

SúSTROMenie

Na začiatku októbra sa stretlo pár šikovných hláv (tí, čo rátajú) a pár šialených hláv (tí, čo organizujú) v krásnom prostredí slovenských hôr, menovite Sitna. Vyšiel z toho týždeň nezabudnuteľných zážitkov pre všetkých, ktorí sme tam boli. Týchto pár nasledujúcich úlomkov z ankety na konci sústredenia je takou malou spomienkou a inšpiráciou, aby sa vám všetkým ľahšie rátalo a tešili sa na to ďalšie. My sa na vás už teraz tešíme.

Čo sa ti páčilo?
- že som tu spoznal veľa super ľudí
- šicko
- nočná obloha, keď vidím veľký voz dvojmo osovo súmerne cez horizontálnu os (v jazere)
- diviaci na šifrovačke

Čo sa ti nepáčilo?
- že keď si TomášL dal okuliare, tak vôbec nevyzeral tak drsne

Sústredenie celkovo
- teším sa z neho
- super
- výborné
- bezva
- dziveeeee
- skveleee
- presvedčilo ma, aby som riešil STROM
- úplne perfektné

Imatrikulácia básnikov
- urobili ste naozaj veľa pre moje ritné svaly: ďakujem
- najlepšie boli mince v riti, fest respect

Adventúrka
- super, najmä ten dom v inej dimenzii
- glycerín + toluén + 3 guličky → TNT :-D
- by som chcel žiť v Rasťovom svete keď sirup je výbušný :-D
- mrtne ma bavila

Nočná šifrovačka
- the best
- supeeeeeer
- dzive

Vedúci
- drsňák s drsným cool výzorom, ktorý vyzerá drsne
- pekná, šarmantná, inteligentná, vtipná, bystrá dievka
- ta sráč, ne?!

S - virtuózna a charizmatická matička
T - dobre sa mláti :-)
R - zasnený charizmatický
O vyšportovaný inteligent
M - vtipálek, ktorý je namakanejší než vyzerá

Riešenia 1. série úloh zimného semestra 33. ročníka

1. Slepý Kleofáš má na stole 100 mincí, z ktorých je jedna otočená lícom hore a zvyšok je otočených rubom hore. Kleofáš hmatom nerozozná rub od líca, môže však mince *presúvať* a *otáčať*. Raz k nemu zostúpil dobrý anjel a ponúkol mu, že ak rozdelí mince na dve kôpky tak, aby bol v každej kôpke rovnaký počet mincí otočených *lícom* hore, prinavráti mu stratený zrak. Ako môže Kleofáš získať stratený zrak? A čo v prípade, že na začiatku bolo zo 100 mincí 20 otočených lícom hore?

Opravoval: Katka Kvašňáková a Vlado "Snoopy" Novák **Počet riešiteľov: 76**

Riešenie:

Na začiatku máme všetky mince na jednej kôpke, pričom práve jedna z nich je otočená lícom hore. Zoberme ľubovoľnú mincu, otočme ju a položme vedľa. Takto sme vytvorili druhú kôpku. Rozlíšime dva prípady. Minca, ktorá bola na začiatku otočená ako jediná lícom hore, nám zostala v prvej kôpke. To znamená, že do druhej kôpky sme dali mincu, ktorá bola pôvodne otočená rubom hore. Teraz je otočená lícom hore v druhej kôpke. V obidvoch kôpkach máme teda po jednej minci otočenej lícom hore. V druhom prípade bola minca, ktorú sme dali do druhej kôpky, pôvodne otočená lícom hore. Teraz je otočená rubom nahor. V prvej kôpke nám nezostala žiadna iná minca otočená lícom hore. V oboch kôpkach tak nie je žiadna minca otočená lícom hore. V prvom aj druhom prípade sme pomohli Kleofášovi splniť úlohu dobrého anjela. Poďme sa pozrieť teraz na situáciu, keď máme na začiatku 20 mincí otočených lícom nahor. Znova majme na začiatku všetky mince na jednej kôpke. Skúsime využiť postup, ktorý sme použili v prvej časti. Zoberme jednu mincu a položme ju vedľa, vytvorili sme tak druhú kôpku. Teraz môžeme mať v prvej kôpke 20 mincí otočených lícom hore a v druhej 1 mincu otočenú lícom hore (v prípade, že sme otočili mincu, ktorá bola pôvodne rubom hore), alebo máme v prvej kôpke 19 mincí otočených lícom hore a v druhej žiadnu mincu otočenú lícom hore (v prípade, že sme otočili mincu, ktorá bola pôvodne lícom hore). Teraz si môžeme všimnúť, že nezávisle od pôvodného otočenia otočenej mince, sa nám po jednom kroku rozdiel mincí otočených lícom hore v oboch kôpkach zmenší o 1. Ak sa vám to nezdá, skúste si postupne presunúť do druhej kôpky ešte pár mincí, otočiť ich a sledovať, že rozdiel mincí otočných lícom hore sa naozaj zmenšuje. Preto opakovaním tohto postupu 20-krát sa nám rozdiel zmenší na nulu a v oboch kôpkach bude rovnaký počet mincí otočených lícom hore.

Komentár: Zaujímavé na tejto úlohe je, že pri riešení úlohy vôbec nie je potrebné uvažovať nad mincami otočenými rubom nahor. V celom riešení sa zaoberáme len mincami otočenými lícom nahor. Taktiež, je dobré uvedomiť si, že postup riešenia opísaný pre prípad 20-tich otočených mincí lícom hore, je použiteľný pre akýkoľvek iný počet mincí otočených lícom nahor. Táto úloha vám nerobila problémy a tak s radosťou sme mohli väčšine dať vysoké počty bodov. Len tak ďalej. :)

2. Ukážte, že rovnica $15x^2 - 7y^2 = 9$ nemá žiadne celočíselné riešenie.

Opravovali: Dávid Hudák a Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 71**

Riešenie:

Predpokladajme, že existujú také dve celé čísla x a y, že pre ne platí zadaná rovnica. Prepíšme si ju do ekvivalentného tvaru

$$15x^2 = 9 + 7y^2.$$

Keďže ľavá strana je násobkom piatich, musí byť násobkom piatich aj pravá strana. Pozrime sa teda na to, aké zvyšky po delení piatimi môže nadobúdať výraz $7y^2 + 9$ pre ľubovoľné celé číslo y. Celé číslo y vieme jednoznačne zapísať v tvare $y = 5p + q$, kde $0 \leq q < 5$ (q nazývame zvyšok čísla y po delení piatimi). Dosadením piatich možností, ktoré prichádzajú do úvahy ($q = 0, 1, 2, 3, 4$) postupne dostávame

$$\begin{aligned}
y = 5p &\implies 7y^2 + 9 = 175p^2 + 9 = 5(35p^2 + 1) + 4\\
y = 5p + 1 &\implies 7y^2 + 9 = 175p^2 + 70p + 16 = 5(35p^2 + 14p + 3) + 1\\
y = 5p + 2 &\implies 7y^2 + 9 = 175p^2 + 140p + 37 = 5(35p^2 + 28p + 7) + 2\\
y = 5p + 3 &\implies 7y^2 + 9 = 175p^2 + 210p + 82 = 5(35p^2 + 42p + 16) + 2\\
y = 5p + 4 &\implies 7y^2 + 9 = 175p^2 + 280p + 121 = 5(35p^2 + 56p + 24) + 1
\end{aligned}$$

Vidíme, že v každom z uvedených prípadov je výraz $7y^2 + 9$ zapísaný ako nejaký násobok čísla päť plus číslo, ktoré nie je násobkom piatich. Preto pre žiadne prirodzené číslo y nie je číslo $7y^2 + 9$ násobkom piatich. Aby rovnica $15x^2 = 7y^2 + 9$ vôbec mala šancu mať riešenie v celých číslach, nutne musí byť výraz $7y^2 + 9$ násobkom piatich. Keďže sme ukázali, že to nie je pravda, tak daná rovnica nemôže platiť pre žiadnu dvojicu celých čísel x a y.

Iné riešenie:

Opäť predpokladajme, že existujú celé čísla x a y spĺňajúce zadanú rovnicu. Vieme, že potom číslo $7y^2 + 9$ musí byť deliteľné piatimi. Uvedomme si, že ak od čísla, ktoré je deliteľné piatimi, odpočítam alebo pripočítam iné číslo deliteľné piatimi, číslo, ktoré dostanem, bude tiež deliteľné piatimi. Preto i číslo $2y^2 + 4 = 7y^2 + 9 - 5y^2 - 5 = 7y^2 + 9 - 5(y^2 + 1)$ musí byť deliteľné piatimi. Kedy je číslo $2y^2 + 4 = 2(y^2 + 2)$ deliteľné piatimi? Len vtedy, ak číslo $y^2 + 2$ je deliteľné piatimi, pretože čísla 2 a 5 sú nesúdeliteľné. A to je možné len ak číslo y^2 dáva po delení piatimi zvyšok tri. A aké musí byť číslo y, aby číslo y^2 dávalo zvyšok tri po delení piatimi? Podobne ako v prvom riešení vyskúšame päť možností, ktoré prichádzajú do úvahy pre y: $y = 5q, 5q+1, 5q+2, 5q+3$ a $5q+4$. A zistíme, že zvyšok čísla y^2 po delení piatimi pre ľubovoľné celé číslo y nikdy nebude číslo tri, môže to byť len jedno z čísel $0, 1$ alebo 4. Preto daná rovnica nemôže mať riešenie pre žiadne celé čísla x a y.

3. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Označme S stred kružnice k jemu vpísanej, A_1, B_1, C_1 body dotyku kružnice k a strán BC, CA, AB trojuholníka. Označme ďalej X priesečník priamok B_1C_1 a CS, Y priesečník priamok B_1C_1 a BS. Dokážte, že
a) body B, X, Y, C ležia na jednej kružnici,
b) body B, X, C_1, S, A_1 ležia na jednej kružnici.

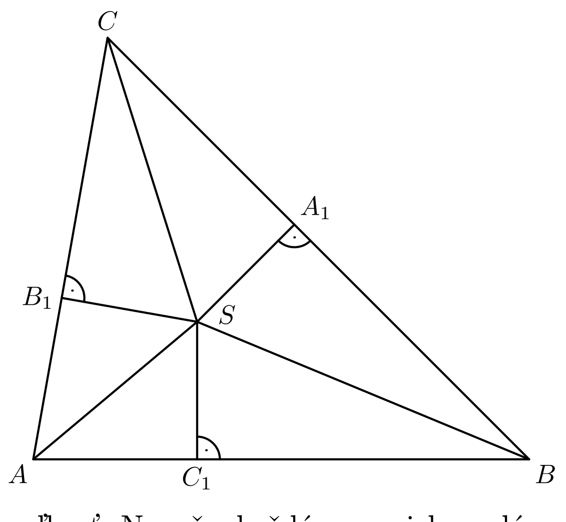
Opravovali: Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 37**

Riešenie:

Tak ako pri mnohých iných úlohách (a to nie len z geometrie), kde treba niečo dokázať, môžeme sa do riešenia pustiť „spredu“ aj „zozadu“. To prvé (spredu) znamená skúsiť sa dobre pozrieť na to, čo je zadané, a niečo z toho odvodiť, niečo nové zistiť alebo objaviť. To druhé (zozadu) znamená skúsiť sa dobre pozrieť na to, čo treba dokázať a rozmeniť to na drobné: rozmyslieť si, čo stačí ukázať, aby požadované tvrdenie platilo apod.

Poďme na to najprv spredu. Ak chceme objaviť (netušené) súvislosti medzi objektami (bodmi, úsečkami, priamkami, kružnicami, atď.) v geometrickej úlohe, je výhodné (ba priam až nevyhnutné) nakresliť si obrázok. Ak si ho nakreslíme dosť hodnoverne, máme šancu prísť na niekoľko zaujímavých vecí.

Po prvé, keďže body A_1, B_1, C_1 sú body dotyku kružnice k vpísanej do trojuholníka ABC s jeho stranami, je veľkosť úsečiek A_1S, B_1S, C_1S rovnaká a rovná polomeru tejto kružnice. Trojuholníky A_1B_1S, B_1C_1S, C_1A_1S sú preto rovnoramenné. Navyše, keďže spojnica stredu kružnice a bodu dotyku je vždy kolmá na príslušnú dotyčnicu, sú úsečky A_1S, B_1S, C_1S kolmé na príslušné strany trojuholníka ABC, takže bez obáv môžeme do náčrtu naznačiť tri pravé uhly.

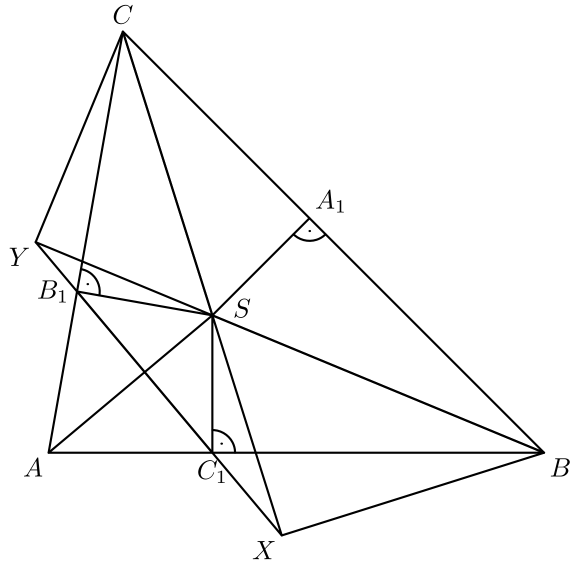


Po druhé, keďže strany AB a AC sú dve dotyčnice z bodu A ku (tej istej) kružnici k, je vzdialenosť bodu A od bodov dotyku B_1 a C_1 rovnaká. Preto je trojuholník AC_1B_1 rovnoramenný. Rovnaký argument nás vie doviesť aj k tomu, že trojuholníky C_1BA_1 a B_1A_1C sú tiež rovnoramenné. (To, že úsečky AC_1 a AB_1 majú rovnakú veľkosť, vieme odvodiť aj iným spôsobom: stačí overiť, že trojuholníky AC_1S a AB_1S sú zhodné. Na to použijeme vetu Ssu: stranu AS majú tieto trojuholníky spoločnú, uhol oproti nej je v oboch trojuholníkoch pravý, a to, že platí $|C_1S| = |B_1S|$, sme si už uvedomili vyššie.)

Po tretie, štvoruholníky AC_1SB_1, BA_1SC_1, CB_1SA_1 sú deltoidy – vždy dve dvojice susedných strán majú rovnakú veľkosť. Navyše, každému z nich sa dá opísať kružnica – je to Talesova kružnica nad priemerom AS, BS, resp. CS.

Ani sme sa nenazdali, a časť úlohy b) máme vyriešenú: dokázali sme, že body B, C_1, S, A_1 ležia na jednej kružnici. Už k nim len nejako primontovať bod X. Ozaj, body X a Y zatiaľ na obrázku vôbec nemáme. Skúsme si ich dokresliť.

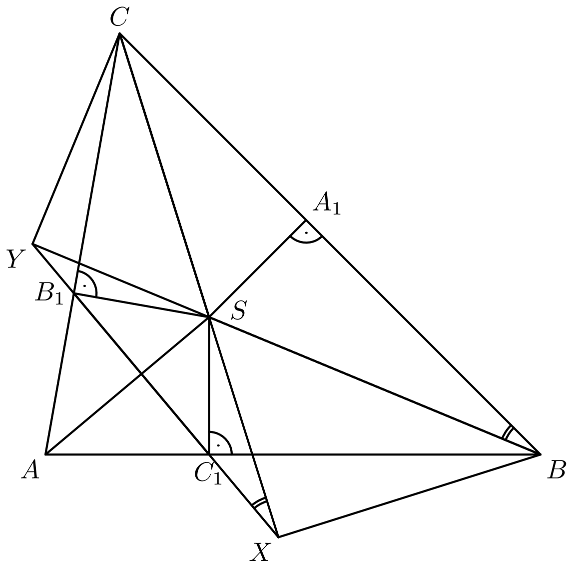
V zadaní sa píše, že body B, X, C_1, S a A_1 ležia na jednej kružnici. Už vieme, že štyri z týchto piatich bodov ležia na Talesovej kružnici nad priemerom BS. Bod X potom tiež musí ležať na tejto kružnici! Uhol SXB teda musí byť pravý! Ak sme si obrázok narysovali dosť presne, uhol SXB naozaj vyzerá byť pravý, a teda sme náchylní tomu uveriť.



Obrázok však nie je dôkaz! To, že nám to pre jeden konkrétny trojuholník takto vyšlo, ešte neznamená, že to tak musí byť stále. (V tomto konkrétnom obrázku napríklad trojuholník SXB vyzerá byť rovnoramenný, ale nie je taký vždy.) Na druhej strane, aj keby sme si narysovali 10 rôznych trojuholníkov, vo všetkých bude uhol SXB vyzerať ako pravý uhol, lebo on pravý v skutočnosti je. Ako to však dokázať?

Na rozdiel od bodov A_1, B_1, C_1, kde kolmosť vyplývala zo všeobecnej vlastnosti dotyčníc, pre bod X ako priesečník osi SC uhla γ a spojnice B_1C_1 bodov dotyku kružnice k a strán trojuholníka ABC, nemáme žiadne takéto všeobecné tvrdenie, o ktoré by sme sa mohli oprieť.

Poďme preto na to zozadu. Čo presne máme dokázať? Potrebujeme overiť, že nejaké štyri body ležia na jednej kružnici. Štyri body ležia na jednej kružnici práve vtedy, ak štvoruholník nimi tvorený je tetivový (toto je priamo definícia tetivového štvoruholníka). Štvoruholník je tetivový práve vtedy, ak súčet protiľahlých uhlov je 180°. Toto je jedno z najznámejších a najpoužívanejších kritérií pre tetivové štvoruholníky a dá sa odvodiť z vety o obvodových a stredových uhloch.



Apropo, obvodové a stredové uhly samy osebe nám môžu pri dôkaze pomôcť. Aby sme dokázali, že body B, X, Y a C ležia na jednej kružnici, stačí ukázať, že z bodov B a X vidno úsečku YC pod rovnakým uhlom, inými slovami stačí ukázať, že $|\sphericalangle YBC| = |\sphericalangle YXC|$.

Veľkosť prvého z nich je $\frac{\beta}{2}$, pretože priamka BY je os uhla β. Veľkosť uhla YXC vypočítame z trojuholníka B_1XC. V ňom poznáme veľkosť uhla pri vrchole C, je to $|\sphericalangle B_1CX| = \frac{\gamma}{2}$, pretože priamka CX je os uhla γ. Veľkosť uhla pri vrchole B_1 v trojuholníku B_1XC vyjadríme pomocou veľkosti uhla AB_1X, ktorý vieme vypočítať vďaka vyššie odvodenému faktu, že trojuholník AC_1B_1 je rovnoramenný, a keďže vrchol oproti základni je α, zvyšné dva vrcholy musia spolu dávať $180° - \alpha$, a teda oba majú veľkosť $90° - \frac{\alpha}{2}$.

$$|\sphericalangle CB_1X| = 180° - |\sphericalangle AB_1X| = 180° - |\sphericalangle AB_1C_1| = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Potom

$$|\sphericalangle YXC| = 180° - \frac{\gamma}{2} - \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = 90° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{180° - \gamma - \alpha}{2} = \frac{\beta}{2},$$

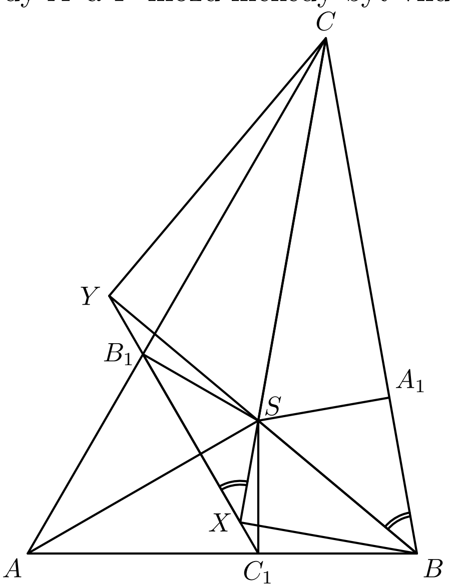
čo bolo treba dokázať. Hurá, podarilo sa nám dokázať časť a).

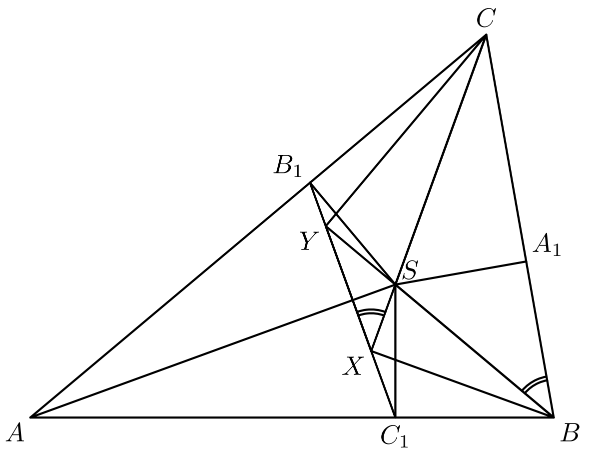
Keď sa znova pozrieme na to, čo sme vypočítali, vlastne sme zároveň dokázali aj časť b). Veď ak $|\sphericalangle YXC| = \frac{\beta}{2}$, tak potom aj $|\sphericalangle C_1XS| = \frac{\beta}{2}$. Znamená to, že z bodu X vidno úsečku C_1S pod uhlom $\frac{\beta}{2}$. No aj z bodu B vidno tú istú úsečku C_1S pod uhlom $\frac{\beta}{2}$, veď BS je predsa os uhla β. Potom body S, C_1, X, B ležia na jednej kružnici. No keďže už vieme, že kružnica, na ktorej ležia body S, C_1 a B, zároveň obsahuje aj bod A_1, všetkých 5 bodov S, C_1, X, B a A_1 leží na jednej kružnici.

Predsa len je teraz predčasné sa tešiť a mať dobrý pocit z vykonanej práce, niekde v riešení sme sa unáhlili. Konkrétne implikácia

$$|\sphericalangle YXC| = \frac{\beta}{2} \quad \Longrightarrow \quad |\sphericalangle C_1XS| = \frac{\beta}{2}$$

platí len ak body Y a C_1, resp. C a S, ležia na tom istom ramene daného uhla. A to nemusí byť vždy tak. Body X a Y môžu niekedy byť vnútri trojuholníka ABC, a to buď jeden, alebo oba:





Vo všetkých prípadoch ale veľkosť uhla YXC vyjde $\frac{\beta}{2}$ použitím rovnakých argumentov. Na druhej strane ak bod X je vnútri trojuholníka ABC, tak

$$|\sphericalangle C_1XS| = 180° - |\sphericalangle YXC| = 180° - \frac{\beta}{2}.$$

Potom súčet veľkostí protiľahlých uhlov v štvoruholníku SXC_1B je $180° - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°$, a teda tento štvoruholník je tetivový, čo znamená, že body S, X, C_1, B ležia na jednej kružnici (na ktorej leží aj bod A_1), čo bolo treba dokázať. Hotovo!

4. a) Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a_1, a_2, pre ktoré platí

$$a_1 \mid a_2 + 1,$$
$$2a_2 \mid a_1 + 2.$$

b) Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a_1, a_2, a_3, pre ktoré platí

$$a_1 \mid a_2 + 1,$$
$$2a_2 \mid a_3 + 2,$$
$$3a_3 \mid a_1 + 3.$$

Opravovali: Robko Hajduk a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 68**

Riešenie:

a) Výraz $x \mid y$ znamená, že číslo x delí číslo y, respektíve y je celočíselným násobkom x. V riešení využijeme na prvý pohľad triviálny poznatok, a to že pokiaľ x aj y sú prirodzené čísla a $x \mid y$, tak musí nutne platiť $x \leq y$.
Tým pádom ak pre nejaké a_1 a a_2 platia zadané vzťahy $a_1 \mid a_2 + 1$ a $2a_2 \mid a_1 + 2$, musia pre tieto čísla platiť aj nerovnosti

$$a_1 \leq a_2 + 1 \quad \text{respektíve} \quad 2a_2 \leq a_1 + 2.$$

Úpravou prvej nerovnosti na tvar $2(a_1 - 1) \leq 2a_2$ dostávame nerovnosť

$$\begin{aligned} 2(a_1 - 1) \leq 2a_2 &\leq a_1 + 2 \\ 2a_1 - 2 &\leq a_1 + 2 \\ a_1 &\leq 4. \end{aligned}$$

Z toho vieme usúdiť, že ak existuje nejaké riešenie, a_1 môže byť najviac 4. Navyše, keďže $2a_2 \mid a_1 + 2$, tak $2 \mid a_1 + 2$, čiže a_1 musí byť párne číslo. Z podmienok $a_1 \leq 4$ a a_1 je párne číslo dostávame, že $a_1 = 2$ alebo $a_1 = 4$.
Vráťme sa teraz k vzťahu $a_1 \mid a_2 + 1$. Keďže a_1 je párne a delí výraz $a_2 + 1$, tak $2 \mid a_2 + 1$, čiže a_2 musí byť nepárne číslo. Využitím tohto poznatku a dosadením hodnoty a_1 do nerovnosti $2(a_1 - 1) \leq 2a_2 \leq a_1 + 2$ dostávame:

- Ak $a_1 = 2$, tak $2 \leq 2a_2 \leq 4$, a teda $a_2 = 1$.
- Ak $a_1 = 4$, tak $4 \leq 2a_2 \leq 6$, a teda $a_2 = 3$.

Takže riešením môžu byť len dvojice $[2, 1]$ a $[4, 3]$. Obidve tieto dvojice vyhovujú zadaniu, čo overíme skúškou.
b) Tak ako v časti a), aj v tejto časti zo zadania vieme odvodiť nerovnosti, ktore musia nutne platiť pre každé riešenie.

$$\begin{aligned} a_1 &\leq a_2 + 1, \\ 2a_2 &\leq a_3 + 2, \\ 3a_3 &\leq a_1 + 3. \end{aligned}$$

Úpravou prvých dvoch nerovností dostávame

$$\begin{aligned} 2(a_1 - 1) \leq 2a_2 &\leq a_3 + 2 \\ 2a_1 - 4 &\leq a_3 \\ 3(2a_1 - 4) &\leq 3a_3. \end{aligned}$$

Spolu s treťou nerovnosťou nám to teda dáva vzťah:

$$3(2a_1 - 4) \leq 3a_3 \leq a_1 + 3.$$

Odtiaľ dostávame, že $3(2a_1 - 4) \leq a_1 + 3$, čo po úprave dáva podmienku $a_1 \leq 3$. Pozrime sa bližšie na vzťah $3a_3 \mid a_1 + 3$. Z tohto vzťahu vidíme, že $3 \mid a_1 + 3$ a keďže $3 \mid 3$, tak musí platiť $3 \mid a_1$. Keďže $a_1 \leq 3$ a $3 \mid a_1$, tak $a_1 = 3$. Potom tretí zadaný vzťah vieme prepísať na

$$\begin{aligned} 3a_3 &\mid a_1 + 3 \\ 3a_3 &\mid 6 \\ a_1 &\mid 2 \end{aligned}$$

Na druhej strane, analogicky ako v časti a) vieme dokázať, že a_3 je párne číslo (zo vzťahu $2a_2 \mid a_3 + 2$). Preto $a_3 = 2$. Pokiaľ teraz dosadíme $a_1 = 2$ a $a_3 = 3$ do nerovnosti $2(a_1 - 1) \leq 2a_2 \leq a_3 + 2$, tak dostaneme, že $4 \leq 2a_2 \leq 4$, a teda $a_2 = 2$.
Jediná trojica, ktorá prichádza do úvahy ako riešenie, je trojica $[3, 2, 2]$. Opäť skúškou overíme, že táto trojica naozaj vyhovuje zadaniu úlohy.

Komentár: Mnohí riešitelia dokázali, že hľadanou trojicou (dvojicami) čísel môže byť iba trojica $[3, 2, 2]$ (dvojice $[2, 1]$ a $[4, 3]$). Vôbec však neoverili, či táto trojica (dvojice) zadaniu naozaj vyhovujú. Keďže takmer všetky úvahy v našom riešení boli dôsledkové, tak skúška správnosti je v tomto prípade nevyhnutná. *Tentokrát* sme však za jej nespomenutie body nestrhávali.

Poradie po 1. sérii Zimného semestra 33. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	H	CS
1.	Eduard Eiben	4. A	GPoštKE	9	9	9	9	1	45
	Martin Vodička	Kvarta	GAlejKE	9	9	9	9	1	45
	Ladislav Bačo	3. A	GPoštKE	9	9	9	9	1	45
4.	Marián Horňák	1. B	GPároNR	9	9	8	9	1	44
	Róbert Tóth	Septima	GAlejKE	9	9	8	9	1	44
	Marek Kukan	3. B	GGrösBA	9	9	9	8	1	44
	Martin Bachratý	3. B	GOkruŽA	9	9	9	8	2	44
	Jana Baranová	Septima	GAlejKE	9	9	8	9	2	44
9.	Jakub Jursa	Oktáva A	GAlejKE	9	9	8	9	0	43
	Josef Tkadlec	R8. A	GJKPraha	9	8	9	9	0	43
	Martin Polačko	Oktáva	GAlejKE	9	9	8	9	0	43
12.	Igor Kossaczký	3. B	GGrösBA	9	9	8	8	0	42
	Radomír Bosák	4. B	GGrösBA	9	9	8	8	1	42
14.	Andrea Görcsösová	Septima	GAlejKE	9	7	8	9	1	41
15.	Dávid Hvizdoš	2. A	GPoštKE	9	8	3	9	0	38
	Miroslav Liščinský	Oktáva B	GAlejKE	9	8	6	9	0	38
	Peter Milošovič	2. A	GPoštKE	9	7	4	9	0	38
18.	Barbora Halajová	1. B	GOkruŽA	6	9	3	9	0	36
	Natália Karásková	Septima	GGrösBA	9	9	-	9	0	36
	Mojmír Majdiš	3. B	GHvieDK	9	9	-	9	0	36
	Jozef Lami	1. A	GPoštKE	9	9	-	9	0	36
	Andrej Kozák	Sexta	GGrösBA	9	9	-	9	0	36
	Monika Vaľková	Septima	GAlejKE	9	9	-	9	1	36
24.	Milan Bartoš	4. E	GPoštKE	9	8	6	6	0	35
25.	Monika Zlaczka	2. A	GPoštKE	8	8	-	9	0	33
	Michal Anderle	Sexta	GHaliLC	9	8	-	8	0	33
	Klára Ficková	1. A	GPoštKE	9	7	-	8	1	33
28.	Petra Zibrínová	2. D	GMudrPO	9	8	3	4	0	32
	Michal Ďurovec	1. A	GPoštKE	7	8	3	6	0	32
	Tomáš Babej	2. A	GPoštKE	9	8	0	7	0	32
31.	Ivana Gašková	Kvinta	GAlejKE	9	8	5	-	0	31
32.	Viktor Szabados	2. B	GGrösBA	9	7	-	7	0	30
	Jakub Šalagovič	Kvinta	GAlejKE	9	7	3	2	0	30
34.	Kristína Faguľová	1. A	GPoštKE	9	4	2	5	0	29
	Katarína Jasenčáková	1. B	GOkruŽA	9	1	1	9	0	29
36.	Miroslava Vašková	2. D	GMudrPO	9	8	3	-	0	28
	Radovan Hnatič	1. A	GPoštKE	4	8	2	6	0	28
	Katarína Révészová	2. A	GPoštKE	9	1	-	9	0	28
39.	Tomáš Rizman	Oktáva B	GVaršŽA	9	9	-	9	0	27
	Denisa Múthová	2.E	ZGaštŽA	4	6	3	8	0	27
	Tomáš Kuzma	Oktáva A	GAlejKE	9	9	-	9	0	27
	Miloslav Homer	1. A	GPoštKE	6	8	-	5	0	27
	Anna Janovcová	Sexta	GAlejKE	9	-	-	9	0	27
	Pavol Guričan	Sexta	GGrösBA	9	9	-	-	1	27

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	H	CS
	Soňa Galovičová	1. B	GOkruŽA	9	-	-	9	1	27
	Tomáš Pavlík	R8. A	GJKPraha	9	9	-	9	0	27
	Michal Petrucha	5. AF	GMetoBA	9	9	-	9	0	27
48.	Michal Kopf	1. A	GSlezCZ	9	8	-	-	0	26
	Alexandra Pistráková	1. A	GPoštKE	7	1	2	8	0	26
	Jakub Hvizdoš	4. A	GPoštKE	9	8	-	9	1	26
51.	Dávid Vendel	4. A	GPoštKE	9	8	8	-	0	25
	Pavol Kossaczký	2. B	GGrösBA	9	8	-	-	0	25
53.	Marta Kořínková	Septima	GGrösBA	9	9	-	3	0	24
54.	Nikola Buková	1. F	GTajoBB	4	8	-	3	0	23
	Matúš Stehlík	Sexta	GAlejKE	9	5	-	4	0	23
56.	Martina Vaváčková	Septima	GPdCoCZ	5	4	4	5	1	22
57.	Sven Relovsky	1. A	GPoštKE	6	1	3	5	0	21
	Alexander Ivanov	Sexta	GGrösBA	9	6	-	-	1	21
	Alžbeta Bohiniková	Sexta	GGrösBA	9	-	-	6	0	21
	Nikola Daubnerová	2. C	GKomeSY	2	9	2	4	0	21
61.	Ladislav Hovan	2. A	GExnáKE	9	4	-	3	1	20
	Ivana Lauková	Septima A	GLettMT	9	1	-	9	0	20
63.	Patrik Lipták	1. A	GPoštKE	6	1	-	6	0	19
	Zuzana Baxová	1. E	G1májTN	5	7	-	-	0	19
	Lucia Fabišíková	4. E	GPoštKE	9	1	0	9	0	19
	Jakub Kireš	1. A	GPoštKE	7	1	-	4	0	19
67.	Daniel Till	2. A	GPoštKE	4	1	-	8	0	17
	Zuzana Komárková	4. A	GJaroCZ	-	8	-	9	0	17
69.	Marek Behún	Septima	GŠtúrMI	9	7	-	-	0	16
70.	Miroslav Mašat	1. A	GPoštKE	7	0	-	1	0	15
	Veronika Habalová	Septima	GAlejKE	9	6	-	-	0	15
	Juraj Mitro	Septima	GMudrPO	9	1	-	4	0	15
73.	Michal Ziman	Septima	GHaliLC	9	-	-	4	1	13
74.	Branislav Sepeši	1. A	GPoštKE	3	1	-	4	0	12
75.	Milica Fabišíková	4. E	GPoštKE	9	-	-	2	0	11
76.	Jana Sásková	Oktáva	G1májTN	5	1	1	2	0	10
77.	Dáša Krasnayová	Sexta	GAlejKE	9	-	-	-	1	9
78.	Marek Mikula	2. C	GOpatKE	4	-	-	-	0	4
79.	Dominik Nezník	2. B	GOpatKE	-	1	1	0	0	3
80.	Matúš Vojtek	2. C	GOpatKE	-	-	-	2	0	2
81.	Miloš Koscelanský	1. D	GOpatKE	-	-	-	-	0	0
	Jozef Antoník	2. E	GOpatKE	-	-	-	-	0	0
	Katarína Čigašová	2. C	GOpatKE	-	-	-	-	0	0
	Samuel Havadej	2.	GMudrPO	-	-	-	-	0	0
	Jakub Ondráček	1. D	GOpatKE	-	-	-	-	0	0
	Jakub Rajčan	1. A	GHronZV	-	-	-	-	0	0

Pohár konštruktérov Zimného semestra 33. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	25	689
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	15	496
3.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	11	348
4.	GOkruŽA	Gymnázium Veľká okružná 22 011 09 Žilina	4	136
5.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	4	75
6.	GJKPraha	Gymnázium Jana Keplera Parléřova 2 169 00 Praha 6	2	70
7.	GHaliLC	Gymnázium Haličská cesta 9 984 03 Lučenec	2	46
8.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	44
9.	GHvieDK	Gymnázium P.O.H. Hviezdoslavovo námestie 18 026 24 D. Kubín	1	36
10.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	2	29
11.	GVaršŽA	Gymnázium Varšavská cesta 1 010 08 Žilina - Vlčince	1	27
11.	ZGaštŽA	Základná škola Gaštanová 56 010 01 Žilina - Solinky I.	1	27
11.	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	27
14.	GSlezCZ	Slezské Gymnázium Zámecký okruh 29 746 01 Opava	1	26
15.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	1	23
16.	GPdCoCZ	Gymnázium P. de Coubertina Křižikovo náměstí 860 390 01 Tábor	1	22
17.	GKomeSY	Gymnázium bilingválne Komenského 215 038 52 Sučany	1	21
18.	GLettMT	Gymnázium J. Lettricha 036 01 Martin	1	20
18.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	20
20.	GJaroCZ	Gymnázium tř. Kpt. Jaroše 14 658 70 Brno	1	17
21.	GŠtúrMI	Gymnázium Ľudovíta Štúra 26 071 01 Michalovce	1	16
22.	GOpatKE	Gymnázium Opatovská 7 041 35 Košice	7	9
23.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2008 • Zimný semester 33. ročníka (2008/2009)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`