STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte Stromáci,

dve série **STROM**u nám zbehli ako voda a s nimi aj celý zimný semester. Odvšadiaľ však už môžeme počuť *Vianoce šalalaaa...*, čo je predzvesťou príchodu najkrajšieho sviatku v roku. Užite si všetky tie koledy, koláčiky, kapusticu, kapra, kopu darčekov, a vôbec všetko na „k“, oddýchnite si od všetkého čo vám znepríjemňovalo život, a potom samozrejme oslávte príchod nového roka so všetkým, čo k tomu patrí. Tí najusilovnejší z Vás sa už teraz môžu začať tešiť na sústromenie, ktoré bude 15.–20. februára 2009 v Lúčke-Potokoch.

S pozdravom a želaním príjemne prežitých sviatkov, Vaši **STROM**isti

Vianočný MaxiKlub Mladých Matematikov

Tak, ako po minulé roky, aj tento rok sa uskutoční neformálne stretnutie riešiteľov, vedúcich, bývalých riešiteľov, bývalých vedúcich, a vôbec všetkých ľudí, ktorých spája pozitívny vzťah ku korešpondenčným matematickým seminárom Malynár, Matik a Strom, inými slovami **Vianočný MaxiKlub Mladých Matematikov**, na ktorý vás všetkých srdečne pozývame. Uskutoční sa v pondelok 22. decembra na Prírodovedeckej fakulte na Jesennej 5 v Košiciach, v miestnosti P/12 (druhé poschodie) v čase 14.00 – 18.00. Tešíme sa na vás všetkých :-)

Riešenia 2. série úloh zimného semestra 33. ročníka

1. Janko vie písať iba číslice 2 a 9. Môže napísať číslo, ktoré má práve 2009 číslic a je deliteľné 2^{2009}? Koľko takých čísel môže napísať?

Opravoval: Marek Derňár **Počet riešiteľov: 53**

Riešenie:

Našou úlohou je nájsť počet 2009-ciferných čísel deliteľných číslom 2^{2009}, ktoré pozostávajú iba z číslic 2 a 9. Keďže 2009-ciferné čísla by sa nám asi veľmi nechcelo vypisovať, tak skúsme úlohu vyriešiť pre malé hodnoty n:

- Skúsme nájsť všetky 1-ciferné čísla deliteľné 2^1, ktoré pozostávajú iba z číslic 2 a 9. Vpodstate máme iba dve možnosti - čísla 2 a 9. Keďže 9 je nepárne, tak riešením tejto úlohy je iba číslo 2.
- Skúsme nájsť všetky 2-ciferné čísla deliteľné 2^2, ktoré pozostávajú iba z číslic 2 a 9. Keďže 2^2 delí hľadané dvojciferné čísla, tak aj 2^1 musí deliť hľadané dvojciferné čísla, čiže číslica na mieste jednotiek musí byť deliteľná 2^1, čo podľa 1. znamená, že to musí byť 2. Takže máme opäť 2 možnosti - čísla 22 a 92, z ktorých však vyhovuje iba 92.
- Skúsme nájsť všetky 3-ciferné čísla deliteľné 2^3, ktoré pozostávajú iba z číslic 2 a 9. Keďže 2^3 delí hľadané trojciferné čísla, tak aj 2^2 musí deliť hľadané trojciferné čísla, čiže posledné dvojčíslie musí byť deliteľné 2^2 (z kritéria deliteľnosti 4), čo podľa 2. znamená, že to musí byť 92. Takže máme opäť 2 možnosti - čísla 292 a 992, z ktorých však vyhovuje iba 992.

Zatiaľ vždy vyšlo, že existuje iba jedno také číslo. Preto môžeme sformulovať hypotézu:

Pre ľubovoľné prirodzené číslo n existuje práve jedno n-ciferné číslo pozostávajúce iba z číslic 2 a 9, ktoré je deliteľné číslom 2^n.

Túto hypotézu však musíme ešte dokázať. Úlohu sme už v podstate vyriešili pre $n = 1$, $n = 2$ a $n = 3$. Pri $n = 2$ a $n = 3$ sme využili poznatok zistený pre $n - 1$, čiže vhodným spôsobom dôkazu by mohla byť matematická indukcia.

Pre $n = 1$ je už tvrdenie dokázané, čiže stačí dokázať, že ak to platí pre nejaké prirodzené číslo n, potom to platí aj pre $n + 1$. Poďme postupovať rovnako ako predtým. Skúsme nájsť všetky $(n + 1)$-ciferné čísla deliteľné 2^{n+1}, ktoré pozostávajú iba z číslic 2 a 9. Keďže 2^{n+1} delí hľadané $(n+1)$-ciferné čísla, tak aj 2^n musí deliť hľadané $(n + 1)$-ciferné čísla, čiže posledné n-čislie musí byť deliteľné 2^n (z kritéria deliteľnosti 2^n).

Podľa indukčného predpokladu však existuje práve jedno n-ciferné číslo deliteľné 2^n, ktoré pozostáva iba z číslic 2 a 9. Označme toto číslo ako x. Keďže $2^n \mid x$, tak $x = k \cdot 2^n$, pričom $k \in \mathbb{N}$.

Potom pre hľadané $(n+1)$-ciferné čísla máme iba dve možnosti: $2 \cdot 10^n + x$ a $9 \cdot 10^n + x$ (pred číslo x napíšeme číslicu 2 alebo 9). Vzhľadok k tomu, že $x = k \cdot 2^n$, tak tieto možnosti sú

$$2 \cdot 2^n \cdot 5^n + k \cdot 2^n \qquad \text{a} \qquad 9 \cdot 2^n \cdot 5^n + k \cdot 2^n$$

(využili sme $10^n = 2^n \cdot 5^n$), respektíve

$$2^n \cdot (2 \cdot 5^n + k) \qquad \text{a} \qquad 2^n \cdot (9 \cdot 5^n + k).$$

Keďže $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ má deliť hľadané čísla, tak $2 \mid (2 \cdot 5^n + k)$, resp. $2 \mid (9 \cdot 5^n + k)$.
Pokiaľ k by bolo párne, tak je splnená iba podmienka $2 \mid (2 \cdot 5^n + k)$ (číslo $9 \cdot 5^n + k$ je nepárne), čiže hľadané číslo je iba jedno, a to $2 \cdot 10^n + x$.
Pokiaľ k by bolo nepárne, tak je splnená iba podmienka $2 \mid (9 \cdot 5^n + k)$ (číslo $2 \cdot 5^n + k$ je nepárne), čiže hľadané číslo je taktiež iba jedno, a to $9 \cdot 10^n + x$.
Tým je však dôkaz matematickou indukciou kompletný, a tak pokiaľ do nášho tvrdenia dosadíme $n = 2009$, tak dostávame, že existuje práve jedno číslo spĺňajúce zadanie našej úlohy.

Komentár: Pri riešení úlohy sme použili kritérium deliteľnosti číslom 2^n, ktoré znie: Prirodzené číslo x je deliteľné 2^n (n je prirodzené) práve vtedy, keď 2^n delí posledné n-číslie čísla x. Skúste si toto tvrdenie dokázať.

2. Nech a, b a c sú
a) prirodzené čísla;
b) kladné reálne čísla.
Dokážte, že

$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Opravovali: Katka Kvašňáková a Tomáš Kocák **Počet riešiteľov: 53**

<u>**Riešenie:**</u>

Máme úlohu s nerovnosťou. Potrebujeme urobiť nejaké čarovné úpravy, aby sme sa dostali k nejakej nerovnosti, ktorá do oči bije, že platí. Napr. $2 > 0$, $x^2 \geq 0$ alebo niečo podobné. No úpravy nie sú taká jednoduchá záležitosť ako pri rovniciach. Pri rovniciach máme problém s nulou, ňou nemôžeme deliť.
Pri nerovniciach však hrozia viaceré problémy. Najznámejší problém je asi násobenie záporným číslom. Ak máme nerovnosť $x > y$ a vynásobíme ju číslom -1, zmení sa nám znamienko: $-x < -y$. Inou zradou je umocňovanie. Ak máme znova nerovnosť $x > y$ a chceme ju umocniť na druhú, nemôžeme to urobiť len tak. Ak vieme, že x, y sú reálne čísla, môže znamienko zostať, alebo sa aj vymeniť. (Skúste nájsť nejaké príklady pre obe možnosti.) Ak vieme, že x, y sú kladné, potom sa znamienko nemení. A čo ak sú x, y obe záporné? Zmení sa znamienko? A čo pri umocňovaní na tretiu? Skúste nad týmito otázkami porozmýšľať a možno si uvedomíte, prečo je potrebné každú úpravu si poriadne premyslieť a prečo sme za nezdôvodňovanie strhávali pár bodov.
Naša nerovnosť je trochu špecifická. Ak by sme písmená medzi sebou pomenili, namiesto a by sme všade napísali b, namiesto b písmeno c a namiesto c písmeno a, hodnota výrazu na ľavej ani na pravej strane by sa nezmenila. Nerovnosť je symetrická. Preto môžeme v našom riešení predpokladať, že neznáme sú nejak zoradené, nech platí $a \leq b \leq c$. (Potom nám pre iné poradie stačí urobiť len nejakú zámenu písmen a použiť rovnaký postup.) Ak máme takto zoradené čísla, potom môžeme čísla a a c vyjadriť pomocou čísla b ako $a = b - x$ a $c = b + y$, kde však o číslach x a y vieme, že sú nezáporné. (Porozmýšľajte prečo.) Teraz dosadíme takto vyjadrené a a b do našej nerovnosti a skúsime ju trochu upraviť.

$$(b-x)^{b-x} \cdot b^b \cdot (b+y)^{b+y} \geq \left[(b-x) \cdot b \cdot (b+y)\right]^{\frac{3b-x+y}{3}}.$$

Umocníme obe strany nerovnosti na tretiu. Môžeme to spraviť, pretože ak bola ľavá strana nerovnosti väčšia ako pravá, tak aj po umocnení ostane väčšia.

$$(b-x)^{3b-3x}\cdot b^{3b}\cdot (b+y)^{3b+3y}\geq \left[(b-x)\cdot b\cdot (b+y)\right]^{3b-x+y}.$$

Pravá strana je kladná, a preto ňou môžeme nerovnosť predeliť.

$$(b-x)^{-2x-y}\cdot b^{x-y}\cdot (b+y)^{2y+x}\geq 1$$

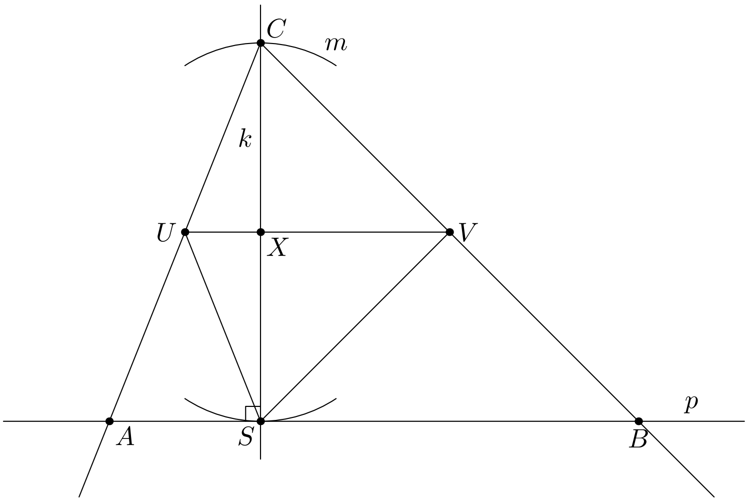
Teraz by pre nás bolo výhodné, ak by sme na ľavej strane nerovnosti mali súčin čísel, ktoré sú väčšie alebo rovné číslu jedna. To môžeme dosiahnuť napríklad tak, že si rozdelíme činiteľ $b^{(-x+y)}$ na dva členy.

$$\begin{aligned}(b-x)^{-2x-y}\cdot b^{2x+y-2y-x}\cdot (b+y)^{2y+x} &\geq 1\\ \left[(b-x)^{-2x-y}\cdot b^{2x+y}\right]\cdot\left[(b+y)^{2y+x}\cdot b^{-2y-x}\right] &\geq 1\\ \left(\frac{b}{b-x}\right)^{2x+y}\left(\frac{b+y}{b}\right)^{2y+x} &\geq 1.\end{aligned}$$

Ľavá strana nerovnosti sa skladá z dvoch činiteľov. Každý z týchto činiteľov je väčší alebo rovný číslu 1. Skúste sa zamyslieť nad tým, prečo to tak je a že týmto sme danú nerovnosť dokázali.
V riešení tejto úlohy sme využili iba kladnosť čísel (Pamätáš, kde?), a preto sme ukázali, že nerovnosť platí pre kladné aj prirodzené čísla.

3. V rovine je daný trojuholník UVS.
a) Zostrojte trojuholník ABC taký, že body U, V, S sú (v tomto poradí) stred strany AC, stred strany BC a päta výšky z vrchola C. Nezabudnite zdôvodniť, že vami zostrojený trojuholník ABC má všetky požadované vlastnosti. Koľko má úloha riešení v závislosti od tvaru daného trojuholníka UVS?
b) Aké podmienky musí spĺňať trojuholník UVS, aby sa dal zostrojiť trojuholník ABC, v ktorom sú body U a V pätami výšok z vrcholov A a B a bod S je stredom strany AB?
c) Zostrojte trojuholník ABC z časti b), ak o ňom navyše viete, že je pravouhlý.

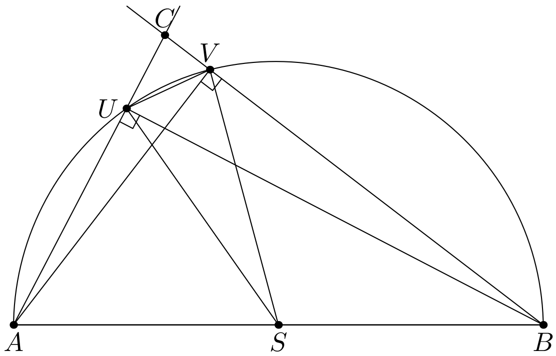
Opravovali: Dávid Hudák a Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 53**
Riešenie:
a) V rovine je daný trojuholník UVS. Našou úlohou je zostrojiť trojuholník ABC, aby U bol stred strany AC, V bol stred strany BC a S bola päta výšky z vrchola C. Ako zvyčajne, takúto úlohu je dobré začať pomocným obrázkom.
Tým sa naša predstava ujasní. Keďže U a V sú stredy strán, tak úsečka UV je strednou priečkou trojuholníka ABC. Čo to ale pre nás znamená? Zrejme UV je rovnobežná s AB a pre dĺžky úsečiek platí: $2\cdot|UV|=|AB|$. Ďalej trojuholníky UVC a ABC sú podobné, lebo majú zhodné uhly. Koeficient podobnosti je $\frac{1}{2}$. Z toho vyplýva, že aj výšky z vrchola C v trojuholníku UVC aj ABC sú v danom pomere. To však znamená, že vrcholy C a S sú od úsečky UV rovnako vzdialené. Inak povedané, C je obrazom bodu S v osovej súmernosti podľa UV. Po týchto úvahách môžeme skúsiť zostrojiť trojuholník ABC.



Postup konštrukcie:

1. **1.** Daný trojuholník UVS.
2. **2.** p, $p \parallel UV$, $S \in p$.
3. **3.** C, C obraz bodu S v osovej súmernosti podľa UV, to znamená:
   - **3.1.** k, $k \perp p$, $S \in k$;
   - **3.2.** X, $X = UV \cap k$;
   - **3.3.** m, $m(X, |XS|)$;
   - **3.4.** C, $C = m \cap k$.
4. **4.** B, $B = \overrightarrow{CV} \cap p$.
5. **5.** A, $A = \overrightarrow{CU} \cap p$.
6. **6.** Trojuholník ABC.

Keďže v osovej súmernosti podľa UV je obrazom bodu S jediný bod C a následne body A a B sú jednoznačne určené, tak úloha má jediné riešenie.

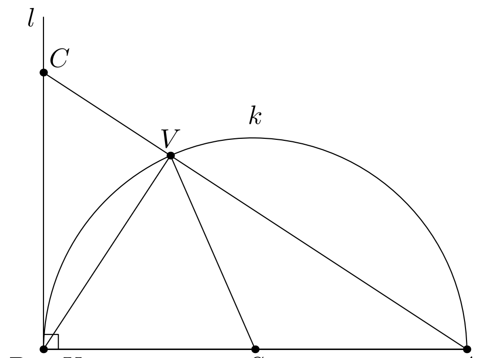


b) Vrchol S má byť stredom strany AB. U a V majú byť päty výšok z vrcholov A a B, teda uhly AVB a AUB musia byť pravé. Vrcholy U a V teda ležia na Talesovej kružnici nad priemerom AB. Z toho vyplýva, že $|SV| = |SU| = |SA|$. Jedinou podmienkou je, aby bol trojuholník UVS rovnoramenný so základňou UV.

c) Podľa b) už vieme, že UVS musí byť rovnoramenný a S má byť stredom úsečky AB. V tejto úlohe žiadame naviac, aby bol trojuholník ABC pravouhlý. Keby bol pravý uhol pri vrchole C, tak by C bol pätou výšky z B aj z A. Platilo by $C = U = V$. Tento prípad nemôže nastať, lebo na začiatku sme predpokladali, že máme daný trojuholník UVS, v ktorom sú samozrejme všetky vrcholy rôzne. Teda pravý vrchol môže byť pri vrchole A alebo B. Tieto dva prípady sú symetrické. Ak je pravý uhol pri vrchole B, tak platí $B = U$, keďže U je pätou výšky z vrchola A. Ak je naopak pravý uhol pri vrchole A, tak platí $A = V$, keďže V je pätou výšky z vrchola B. Takže možné budú dve riešenia. Konštruovať budeme naraz obidve riešenia.

Postup konštrukcie:

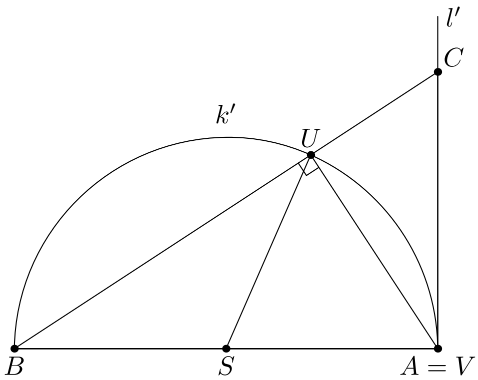
Pravý uhol bude pri B:



1. Daný trojuholník UVS.
2. B, $B = U$.
3. k, $k(S, |SB|)$.
4. A, $A = k \cap \overrightarrow{BS}$.
5. l, $l \perp BS$, $B \in l$.
6. C, $C = l \cap \overrightarrow{AV}$.
7. pravouhlý trojuholník ABC.

Pravý uhol bude pri A:

1'. Daný trojuholník UVS.
2'. A, $A = V$
3'. k', $k'(S, |SA|)$
4'. B, $B = k' \cap \overrightarrow{AS}$
5'. l', $l' \perp AS$, $A \in l'$
6'. C, $C = l' \cap \overrightarrow{BU}$
7'. pravouhlý trojuholník ABC

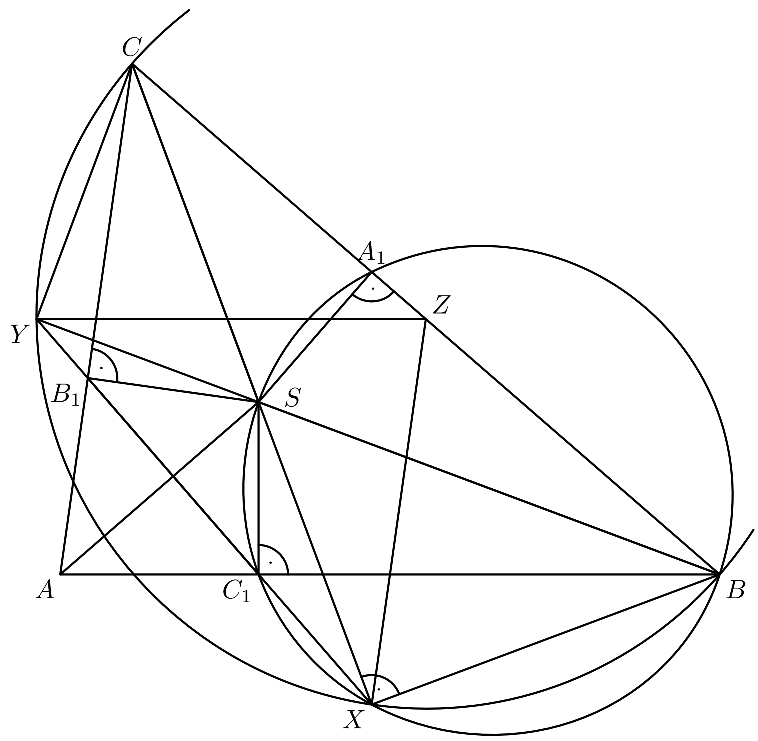


4. Je daný ostrouhlý trojuholník ABC. Označme S stred kružnice k jemu vpísanej, A_1, B_1, C_1 body dotyku kružnice k a strán BC, CA, AB trojuholníka. Označme ďalej X priesečník priamok B_1C_1 a CS, Y priesečník priamok B_1C_1 a BS, Z stred strany BC. Dokážte, že
a) priamky YZ a AB sú rovnobežné,
b) trojuholník XYZ je rovnostranný práve vtedy, ked veľkost uhla α je 60°,
c) spojnica B_1C_1 bodov dotyku kružnice vpísanej danému trojuholníku, os uhla CS, a stredná priečka rovnobežná s AC sa pretínajú v jednom bode.

Opravovali: Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 36**

Riešenie:

Mnohí z vás si všimli, že podozrivo veľa bodov v zadaní tejto úlohy je rovnakých ako v zadaní tretej úlohy z prvej série. Skúsme ju preto nejako využiť. V tretej úlohe z prvej série sme v časti a) dokázali, že body B, X, Y, C ležia na jednej kružnici. V časti b) tej istej úlohy sme navyše dokázali, že body B, X, C_1, S, A_1 ležia na jednej kružnici.



Druhá menovaná kružnica, teda tá, na ktorej ležia body B, X, C_1, S, A_1, je očividne Talesova kružnica nad priemerom BS, keďže uhly BC_1S a BA_1S sú pravé. Potom aj uhol BXS je pravý, čo ale znamená, že aj uhol BXC je pravý. Potom kružnica, na ktorej ležia body B, X, C (a aj Y) je Talesova kružnica nad priemerom BC.
Tu do našich úvah vstupuje nový bod Z, ktorý v minulej úlohe nebol. Je to stred strany BC, takže je to okrem iného aj stred spomínanej Talesovej kružnice nad priemerom BC. Z toho vieme okamžite odvodiť niekoľko zaujímavých faktov: dĺžky úsečiek BZ, XZ, YZ, CZ sú rovnaké – rovnajú sa polomeru Talesovej kružnice nad priemerom BC. Preto trojuholníky BZX, XZY a YZC (plus niekoľko ďalších) sú rovnoramenné. Ktorý z nich sa nakoniec zíde, uvidíme.
V časti a) zadanej úlohy máme dokázať, že priamky AB a YZ sú rovnobežné. Na to stačí ukázať rovnosť uhlov YZC a ABC (budú to potom súhlasné uhly), alebo rovnosť uhlov ZYB a ABY (budú to potom striedavé uhly).

Keďže priamka BY je os uhla β, platí

$$|\sphericalangle ABY| = |\sphericalangle YBZ| = \frac{\beta}{2}.$$

Na druhej strane, trojuholník YBZ je rovnoramenný, pretože $|YZ| = |BZ|$, a teda

$$|\sphericalangle ZYB| = |\sphericalangle YBZ| = \frac{\beta}{2},$$

čo bolo treba dokázať.
K podobnému záveru sa dalo dopracovať aj nasledovne: Keďže priamka BY je os uhla β, platí $|\sphericalangle YBC| = \frac{\beta}{2}$. Tento uhol je v Talesovej kružnici so stredom Z prechádzajúcej bodmi B, X, Y, C obvodový uhol, pod ktorým vidno úsečku YC. K nemu zodpovedajúci stredový uhol je dva krát väčší, preto

$$|\sphericalangle YZC| = 2 \cdot |\sphericalangle YBC| = 2 \cdot \frac{\beta}{2} = \beta = |\sphericalangle ABC|,$$

čo bolo treba dokázať.
Pred tým, ako sa dostaneme k časti b), pozrime sa najprv na časť c). V nej treba dokázať, že nejaké tri priamky sa pretínajú v jednom bode. Dve z týchto priamok, konkrétne priamky B_1C_1 a CS, sa očividne pretínajú v bode X – bod X je definovaný priamo ako ich priesečník. Jediný bod, v ktorom sa môžu pretínať všetky tri priamky, je preto bod X. Stačí teda dokázať, že bod X leží na tretej spomínanej priamke, na strednej priečke rovnobežnej s AC.
Stredná priečka rovnobežná s AC je tá rovnobežka (presnejšie jej časť), ktorá prechádza stredmi strán AB a BC, teda okrem iného bodom Z. Ak ukážeme, že priamka XZ je rovnobežná s AC, bude to znamenať, že priamka XZ je práve tá stredná priečka. Stačí teda dokázať, že priamky AC a XZ sú rovnobežné. To je ale predsa rovnaká úloha ako v časti a), takže by sa mala dať vyriešiť rovnako! A naozaj,

$$|\sphericalangle ZXC| = |\sphericalangle XCZ| = \frac{\gamma}{2} = |\sphericalangle XCA|,$$

takže uhly ZXC a XCA sú striedavé, preto $AC \parallel XZ$.
Pozrime sa teraz konečne na časť b). Už vieme, že $AB \parallel YZ$ a $AC \parallel XZ$, z čoho sa dá jednoducho odvodiť, že

$$|\sphericalangle XZY| = |\sphericalangle CAB| = \alpha.$$

Trojuholník XYZ je rovnoramenný so základňou XY (dĺžky ramien XZ a YZ sa rovnajú polomeru Talesovej kružnice nad priemerom BC so stredom Z), takže vieme dopočítať aj veľkosti zvyšných dvoch uhlov:

$$|\sphericalangle XYZ| = |\sphericalangle YXZ| = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Vidíme, že <u>ak</u> $\alpha = 60^\circ$, <u>tak</u> všetky tri uhly v trojuholníku XYZ majú veľkosť 60°, a teda trojuholník XYZ je rovnostranný. Na druhej strane, <u>ak</u> trojuholník XYZ je rovnostranný, čiže všetky jeho uhly majú veľkosť 60°, <u>tak</u> musí platiť $\alpha = 60^\circ$.
Platí teda ekvivalencia: trojuholník XYZ je rovnostranný <u>práve vtedy, keď</u> veľkosť uhla α je 60°, čo bolo treba dokázať.

Konečné poradie Zimného semestra 33. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
1.	Martin Vodička	Kvarta	GAlejKE	9	9	9	9	9	8	9	9	3	89
2.	Josef Tkadlec	R8. A	GJKPraha	9	8	9	9	9	9	9	9	2	88
2.	Martin Bachratý	3. B	GOkruŽA	9	9	9	8	9	8	9	9	2	88
2.	Marián Horňák	1. B	GPároNR	9	9	8	9	9	9	9	8	2	88
5.	Marek Kukan	3. B	GGrösBA	9	9	9	8	9	4	9	9	3	84
6.	Jana Baranová	Septima	GAlejKE	9	9	8	9	9	2	9	8	1	80
7.	Ladislav Bačo	3. A	GPoštKE	9	9	9	9	9	8	9	-	2	79
8.	Natália Karásková	Septima	GGrösBA	9	9	-	9	9	7	8	8	0	76
8.	Róbert Tóth	Septima	GAlejKE	9	9	8	9	7	2	7	9	-2	76
10.	Jakub Jursa	Oktáva A	GAlejKE	9	9	8	9	9	2	9	9	-3	74
10.	Martin Polačko	Oktáva	GAlejKE	9	9	8	9	8	4	6	9	-2	74
12.	Eduard Eiben	4. A	GPoštKE	9	9	9	9	9	1	8	9	2	73
13.	Miroslav Liščinský	Oktáva B	GAlejKE	9	8	6	9	9	4	7	9	0	71
14.	Peter Milošovič	2. A	GPoštKE	9	7	4	9	5	8	8	-	0	67
14.	Tomáš Babej	2. A	GPoštKE	9	8	0	7	8	7	7	6	0	67
14.	Radomír Bosák	4. B	GGrösBA	9	9	8	8	9	8	8	-	1	67
17.	Monika Vaľková	Septima	GAlejKE	9	9	-	9	7	-	9	7	1	66
18.	Michal Petrucha	5. AF	GMetoBA	9	9	-	9	9	6	8	9	2	65
18.	Igor Kossaczký	4. B	GGrösBA	9	9	8	8	8	7	8	-	0	65
20.	Tomáš Pavlík	R8. A	GJKPraha	9	9	-	9	9	8	5	9	1	63
20.	Michal Ďurovec	1. A	GPoštKE	7	8	3	6	9	2	7	4	1	63
22.	Denisa Múthová	2.E	GRužiŽA	4	6	3	8	9	0	8	9	0	62
22.	Barbora Halajová	1. B	GOkruŽA	6	9	3	9	8	2	6	2	0	62
24.	Klára Ficková	1. A	GPoštKE	9	7	-	8	9	-	9	-	1	60
25.	Viktor Szabados	2. B	GGrösBA	9	7	-	7	8	0	5	8	0	59
26.	Soňa Galovičová	1. B	GOkruŽA	9	-	-	9	9	3	8	2	2	58
26.	Monika Zlaczka	2. A	GPoštKE	8	8	-	9	8	0	5	6	0	58
28.	Andrej Kozák	Sexta	GGrösBA	9	9	-	9	7	1	6	-	0	56
28.	Dávid Hvizdoš	2. A	GPoštKE	9	8	3	9	4	2	4	4	-6	56
30.	Matúš Stehlík	Sexta	GAlejKE	9	5	-	4	7	6	8	3	1	54
31.	Petra Zibrínová	2. D	GMudrPO	9	8	3	4	1	2	5	8	0	53
31.	Jozef Lami	1. A	GPoštKE	9	9	-	9	5	6	-	-	0	53
33.	Ivana Gašková	Kvinta	GAlejKE	9	8	5	-	2	7	5	-	0	52
33.	Radovan Hnatič	1. A	GPoštKE	4	8	2	6	3	7	7	-	0	52
33.	Daniel Till	1. A	GPoštKE	4	1	-	8	8	1	7	7	0	52
36.	Pavol Guričan	Sexta	GGrösBA	9	9	-	-	8	-	8	-	1	51
36.	Tomáš Kuzma	Oktáva A	GAlejKE	9	9	-	9	8	8	8	-	0	51
38.	Jakub Šalagovič	Kvinta	GAlejKE	9	7	3	2	9	0	2	0	0	50
38.	Andrea Görcsösová	Septima	GAlejKE	9	7	8	9	-	2	7	-	-2	50
40.	Kristína Faguľová	1. A	GPoštKE	9	4	2	5	4	1	7	1	0	49
41.	Tomáš Rizman	Oktáva B	GVaršŽA	9	9	-	9	8	8	5	-	0	48
42.	Alžbeta Bohiniková	Sexta	GGrösBA	9	-	-	6	-	-	9	8	0	46
43.	Mojmír Majdiš	3. B	GHvieDK	9	9	-	9	9	0	-	-	0	45

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	H	CS
43.	Alexander Ivanov	Sexta	GGrösBA	9	6	-	9	3	1	5	-	1	45
45.	Katarína Jasenčáková	1. B	GOkruŽA	9	1	1	9	4	1	5	-	0	44
46.	Lucia Fabišíková	4. E	GPoštKE	9	1	0	9	4	4	7	4	-3	42
46.	Miloslav Homer	1. A	GPoštKE	6	8	-	5	-	7	1	-	0	42
48.	Katarína Révészová	2. A	GPoštKE	9	1	-	9	2	2	7	0	0	41
48.	Jakub Hvizdoš	4. A	GPoštKE	9	8	-	9	4	2	4	3	-5	41
50.	Sven Relovsky	1. A	GPoštKE	6	1	3	5	2	1	6	3	0	39
51.	Michal Ziman	Septima	GHaliLC	9	-	-	4	9	3	9	-	1	37
52.	Veronika Habalová	Septima	GAlejKE	9	6	-	-	9	2	8	-	-2	36
53.	Milan Bartoš	4. E	GPoštKE	9	8	6	6	-	-	-	-	0	35
54.	Michal Anderle	Sexta	GHaliLC	9	8	-	8	-	-	-	-	0	33
55.	Miroslava Vašková	2. D	GMudrPO	9	8	3	-	-	-	-	-	0	28
56.	Anna Janovcová	Sexta	GAlejKE	9	-	-	9	-	-	-	-	0	27
57.	Michal Kopf	1. A	GSlezCZ	9	8	-	-	-	-	-	-	0	26
57.	Alexandra Pistráková	1. A	GPoštKE	7	1	2	8	-	-	-	-	0	26
59.	Dávid Vendel	4. A	GPoštKE	9	8	8	-	-	-	-	-	0	25
60.	Marta Kořínková	Septima	GGrösBA	9	9	-	3	-	-	-	-	0	24
61.	Nikola Buková	1. F	GTajoBB	4	8	-	3	-	-	-	-	0	23
62.	Martina Vaváčková	Septima	GPdCoCZ	5	4	4	5	-	-	-	-	1	22
62.	Milica Fabišíková	4. E	GPoštKE	9	-	-	2	4	-	5	2	0	22
62.	Jakub Kireš	1. A	GPoštKE	7	1	-	4	-	1	1	-	0	22
65.	Nikola Daubnerová	2. C	GKomeSY	2	9	2	4	-	-	-	-	0	21
65.	Dušan Blicha	septima	GAlejKE	-	-	-	-	6	2	7	3	-3	21
67.	Ladislav Hovan	2. A	GExnáKE	9	4	-	3	-	-	-	-	1	20
67.	Ivana Lauková	Septima A	GLettMT	9	1	-	9	-	-	-	-	0	20
69.	Zuzana Baxová	1. E	G1májTN	5	7	-	-	-	-	-	-	0	19
69.	Patrik Lipták	1. A	GPoštKE	6	1	-	6	-	-	-	-	0	19
71.	Zuzana Komárková	4. A	GJaroCZ	-	8	-	9	-	-	-	-	0	17
71.	Pavol Kossaczký	3. B	GGrösBA	9	8	-	-	-	-	-	-	0	17
73.	Marek Behún	Septima	GŠtúrMI	9	7	-	-	-	-	-	-	0	16
74.	Miroslav Mašat	1. A	GPoštKE	7	0	-	1	-	-	-	-	0	15
74.	Branislav Sepeši	1. A	GPoštKE	3	1	-	4	-	1	-	1	0	15
74.	Juraj Mitro	Septima	GMudrPO	9	1	-	4	-	-	-	-	0	15
77.	Dominik Nezník	2. B	GOpatKE	-	1	1	0	4	3	-	-	0	13
78.	Jana Sásková	Oktáva	G1májTN	5	1	1	2	-	-	-	-	0	10
79.	Dáša Krasnayová	Sexta	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	-	-	1	9
80.	Marek Mikula	2. C	GOpatKE	4	-	-	-	-	-	-	-	0	4
81.	Matúš Vojtek	2. C	GOpatKE	-	-	-	2	-	-	-	-	0	2
82.	Miloš Koscelanský	1. D	GOpatKE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0
82.	Jozef Antoník	2. E	GOpatKE	-	-	-	-	0	0	-	-	0	0
82.	Katarína Čigašová	2. C	GOpatKE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0
82.	Samuel Havadej	2.	GMudrPO	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0
82.	Jakub Ondráček	1. D	GOpatKE	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0
82.	Jakub Rajčan	1. A	GHronZV	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0

Pohár konštruktérov Zimného semestra 33. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	25	1113
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	16	880
3.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	11	590
4.	GOkruŽA	Gymnázium Veľká okružná 22 011 09 Žilina	4	252
5.	GJKPraha	Gymnázium Jana Keplera Parléřova 2 169 00 Praha 6	2	151
6.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	4	96
7.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	88
8.	GHaliLC	Gymnázium Haličská cesta 9 984 03 Lučenec	2	70
9.	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	65
10.	GRužiŽA	Gymnázium bilingválne T. Ružičku 3 010 01 Žilina	1	62
11.	GVaršŽA	Gymnázium Varšavská cesta 1 010 08 Žilina - Vlčince	1	48
12.	GHvieDK	Gymnázium P.O.H. Hviezdoslavovo nám. 18 026 24 D. Kubín	1	45
13.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	2	29
14.	GSlezCZ	Slezské Gymnázium Zámecký okruh 29 746 01 Opava	1	26
15.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	1	23
16.	GPdCoCZ	Gymnázium P. de Coubertina Křižikovo nám. 860 390 01 Tábor	1	22
17.	GKomeSY	Gymnázium bilingválne Komenského 215 038 52 Sučany	1	21
18.	GLettMT	Gymnázium J. Lettricha 036 01 Martin	1	20
18.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	20
20.	GOpatKE	Gymnázium Opatovská 7 041 35 Košice	7	19
21.	GJaroCZ	Gymnázium tř. Kpt. Jaroše 14 658 70 Brno	1	17
22.	GŠtúrMI	Gymnázium Ľudovíta Štúra 26 071 01 Michalovce	1	16
23.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 3 • December 2008 • Zimný semester 33. ročníka (2008/2009)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`