STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte Stromáci,

dačo tu píšem na úvod, ktorý bude úplne iný, ale proste nechcem, aby to vyzeralo tak prázdno. To znamená, že každý komu sa tento úvod zdá katastrofálny nech vymyslí nejaký iný a pošle ho. A inak nezabúdajte hľadať a posielať príklady na matboj!!! Vaši **STROM**isti

Potrénuj si svoj odhad

Určite ste zvedaví, ako vznikali obrázky. Na prvom obrázku bolo vygenerovaných 714 bodiek pomocou dvojrozmerného normálneho rozdelenia s vynechávaním tých bodov, ktoré sú "príliš blízko" k už nejakým vygenerovaným. Druhý obrázok zodpovedá Lissajousovej krivke s parametrami $a = 5$,$b = 7$ a krivka má dĺžku 36,4683. Tretí obrázok je len generovaný z rovnomerného rozdelenia na štvorci so zamietaním tých bodov, ktoré spĺňajú určitú pomerne komplikovanú nerovnosť. (Ak nerozumiete veľa pojmom z posledných viet, tak to je v poriadku. Ak pôjdete na vysokú školu študovať matematiku, tak vám to prezradia.)
Do našej pošty nám prišlo od vás 7 tipov. Chybu Vašich odhadov sme vypočítali podľa čarovnej formulky

$$Chyba = |\log_2(\frac{n_1}{n_1^\star})| + |\log_2(\frac{n_2}{n_2^\star})| + |\log_2(\frac{n_3}{n_3^\star})|$$

kde n_1, n_2, n_3 sú Vaše odhady a $n_1^\star$, $n_2^\star$, $n_3^\star$ sú skutočné hodnoty. Uznávame, že je to škaredá formulka, ale skúste sa zamyslieť, prečo je celkom vhodná. Po náročných počtoch sme nakoniec dospeli k výsledkom: 1. **Pepa T.** - 0,21; 2. Kristína F. - 1,24; 3. Marek K. - 1,25; 4. Monika Z. - 1.29; 5. Maťo B. - 1,38; 6. Aďa G. - 1,79; 7. Janka B. - 1,99. Pepovi blahoželáme a čaká ho u nás sladká odmena. Ďakujeme všetkým, ktorí sa zúčastnili!

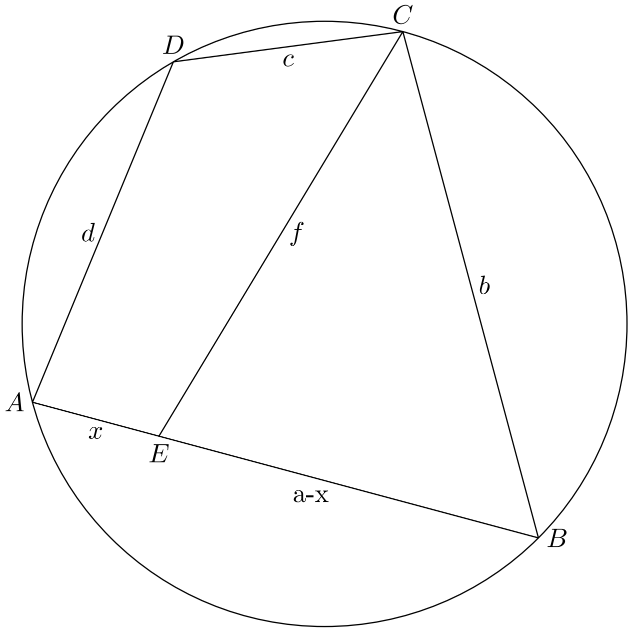
Nová súťaž

V dnešnej súťaži sme si pre Vás pripravili trošku nematematickú úlohu. Možno ste už počuli niekedy o palindrómoch. Sú to také čísla, ktoré sa čítajú spredu aj odzadu rovnako, napr.16761 je palindróm. My od vás nechceme, aby ste našli čo najviac takých čísel (to by bolo trošku ľahké), ale čo najviac takých anglických slov, ktoré sa čítajú spredu i odzadu rovnako, napr. madam. Vaše riešenia nám posielajte spolu s druhou sériou. Tešíme sa na Vašu vynaliezavosť!

Riešenia 3. série úloh letného semestra 33. ročníka

1. Vlada a Tomáša jedného dňa prestalo baviť študovať matematiku a tak sa rozhodli že ako správni spolubývajúci sa presťahujú niekam, kde je čistý vzduch a kde nie sú žiadne problémy. Preto sa dohodli, že si kúpia pozemok. Štúdium matematiky v nich ale zanechalo hlboké stopy. Kúpili si pozemok v tvare tetivového štvoruholníka. Po bratsky si chceli rozdeliť pozemok na dve polovice s rovnakým obvodom a obsahom. Vypočítali si, že musia zapichnúť kôl do jednej strany štvoruholníka a spojiť ho s protiľahlým vrcholom (sú dva, vyberte si jeden :-). Ukážte, že ak takto získali dva pozemky s rovnakým obvodom a obsahom, potom musia mať dve strany pôvodného pozemku rovnakú dĺžku.

Opravovali: Katarína Povolná a Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 23**
Riešenie:
Pozrime sa najprv na to, čo nám hovorí zadanie a akú úlohu máme vlastne riešiť. Máme daný tetivový štvoruholník $ABCD$ a vieme, že niekde na jeho obvode sa nachádza bod E, ktorý delí daný štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom aj obvodom. Môžeme predpokladať, že bod E leží na strane AB. Túto situácia vieme dosiahnuť vždy vhodným označením vrcholov štvoruholníka $ABCD$.



Označme si dĺžky strán štvoruholníka $ABCD$ postupne a, b, c, d, dĺžku $|AE| = x$ a $|CE| = f$. Potom je zrejmé, že $|BE| = a - x$. Keďže obvod trojuholníka EBC má byť rovnaký ako obvod štvoruholníka $AECD$ musí platiť, že $x + f + c + d = a - x + b + f$, z čoho po krátkej úprave vieme získať výraz pre x. Dostaneme, že $x = \frac{a+b-c-d}{2}$ (*).
Pozrime sa teraz na to, čo vieme zistiť z rovnosti obsahov štvoruholníka $AECD$ a trojuholníka EBC. Je zrejmé, že obsah štvoruholníka $ABCD$ vieme vyjadriť ako $S_{ABCD} = S_{AECD} + S_{EBC}$ a zároveň pre ten istý obsah platí $S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC}$. Keďže $S_{AECD} = S_{EBC}$ (vyplýva to zo zadania), tak $S_{ABCD} = 2S_{EBC}$. Označme si $\angle ABC = \beta$ a $\angle ADC = \gamma$. Potom $S_{EBC} = \frac{(a-x)b\sin\beta}{2}$ a $S_{ADC} + S_{ABC} = \frac{dc\sin\gamma}{2} + \frac{ab\sin\beta}{2}$. Do tohto okamihu sme ešte vôbec nevyužili informáciu o tom, že štvoruholník $ABCD$ je tetivový. To je taký štvoruholník, ktorému sa dá opísať kružnica. Takéto štvoruholníky sa vyznačujú jednou peknou vlastnosťou a síce, že je v nich súčet uhlov pri protiľahlých vrcholoch vždy rovný 180°. V našom označení to znamená, že $\beta + \gamma = 180°$ a teda $\gamma = 180° - \beta$. Na základe definície funkcie sínus sa jednoduchým spôsobom dá ukázať, že $\sin(180° - \beta) = \sin\beta$.
Po dosadení do rovnosti $2S_{EBC} = S_{ADC} + S_{ABC}$ výrazy pre obsahy jednotlivých trojuholníkov dostaneme rovnicu $cd\sin\beta + ab\sin\beta = 2(a-x)b\sin\beta$. Môžeme teraz predeliť túto rovnicu výrazom $\sin\beta$? Mohli by sme v tom prípade, ak by $\sin\beta \neq 0$. My ale vieme, že to platí, pretože ak by $\sin\beta = 0$ tak nutne $\beta = 0$ a $ABCD$ by nebol vôbec štvoruholníkom. Po predelení spomínanej rovnice $\sin\beta$ dostaneme rovnicu $cd + ab = 2(a-x)b$ a do nej dosadíme výraz pre x z (*). Po krátkej úprave zistíme, že strany štvoruholníka $ABCD$ musia spĺňať rovnosť $(d-b)(c-b) = 0$, čo je možné len v prípade, že $d = b$ alebo $b = c$. ČBTD (Čo Bolo Treba Dokázať)

Komentár: Úloha nebola zložitá, o čom hovorí aj percento úspešnosti. Stačilo prísť len na správne vyjadrenie obsahov a trochu sa pohrať s rovnicami. Máme len jedinú pripomienku a to, že keď delíte nejakú rovnicu daným výrazom, mali by ste zdôvodniť, prečo tento výraz nie je rovný nule. Nulou predsa deliť nemôžeme. Relatívne u málo z vás sme našli toto zdôvodnenie. Ale žiaden strach bodíky zatiaľ za to dole nešli. Len vás chceme na túto chybu upozorniť a dávajte si na ňu v budúcnosti pozor!

2. Marek dostal na narodeniny sadu „skoro eurokalkulačiek". „Skoro eurokalkulačky" vedeli robiť len jednu vec. Zadáš číslo, stlačíš veľké okrúhle tlačidlo a kalkulačka ti ukáže nejaké číslo. Marek sa chvíľu hral a zistil ako fungujú. Na zadnej strane každej eurokalkulačky je napísaný nejaký polynóm s celočíselnými koeficientami. Všetko, čo robila kalkulačka nebolo nič iné ako to, že číslo dosadila do polynómu. Navyše si Marek v návode prečítal, že každá eurokalkulačka pri zadaní čísla 5 ukáže číslo 2005, tzv. „eurokúzlo". Marek si tieto kalkulačky obľúbil a tak skúšal, aké výsledky dostane, keď vyskúša aj iné čísla. Nepáčilo sa mu ale, že keď zadal čísla 30 alebo 2005 do kalkulačky, nikdy nedostal druhú mocninu celého čísla. Povedal si ale, že to bude určite len preto, že má málo kalkulačiek a tak si opýtal nové „skoro eurokalkulačky" aj na meniny.
a) Je možné, aby dostal aj takú, ktorá mu ukáže druhú mocninu prirodzeného čísla, ak zadá číslo 30?
b) Je možné, aby dostal aj takú, ktorá mu ukáže druhú mocninu prirodzeného čísla, ak zadá číslo 2005?

Opravovali: Gabriela Vozáriková a Tomáš Lučivjanský **Počet riešiteľov: 20**

Riešenie:

a) V zadaní úlohy nebola žiadna informácia o stupni polynómov, preto uvažujme všeobecný polynóm $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Zo zadania vieme, že $P(5) = 2005$ pre ľubovoľný polynóm P. Úlohou je zistiť, či existuje eurokalkulačka s takým polynómom, aby $P(30) = c^2$ (c je prirodzené číslo). Skúsme si $P(30)$ vyjadriť pomocou $P(5)$, teda $P(30) = a_n30^n + a_{n-1}30^{n-1} + \cdots + a_130 + a_0 = P(5) + a_n(30^n - 5^n) + \cdots + a_1(30 - 5) = 2005 + a_n(30^n - 5^n) + \cdots + a_1(30 - 5)$. Každý z týchto sčítancov okrem prvého (čísla 2005) je deliteľný číslom 25, lebo 25 delí $30^x - 5^x$ pre $x = 1, 2, \ldots, n$ (vyplýva to zo vzorčeka $a^n - b^n = (a - b).(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, ktorý platí pre všetky prirodzené čísla n, v našom prípade $30^n - 5^n = 25(30^{n-1} + 30^{n-2}.5 + \cdots + 30.5^{n-2} + 5^{n-1})$, pričom je potrebné si uvedomiť, že výraz v zátvorke je súčtom celých čísel, teda aj výraz v zátvorke je celé číslo, a koeficienty v polynóme sú tiež celé čísla, teda 25 delí $a_n(30^n - 5^n)$). Teda $P(30) = 2005 + 25.l = 25.(l + 80) + 5 = 5.(5.(l + 80) + 1)$, pričom l je celé číslo, teda 25 nedelí $P(30)$, ale 5 delí $P(30)$. Teraz predpokladajme, že $P(30)$ je druhou mocninou prirodzeného čísla, vieme, že je deliteľné 5 (prvočíslo), potom ale musí byť aj deliteľné číslom 25, kde dostávame spor, lebo sme ukázali že pre ľubovoľný eurokalkulačkový polynóm 25 nedelí $P(30)$. Teda neexistuje taká eurokalkulačka, aby po naťukaní 25 nám vyhodila druhú mocninu prirodzeného čísla.

b) Postupujeme podobne ako po a). V tomto prípade využijeme, že 2000 delí $2005^n - 5^n$ a 25 delí 2000, teda aj 25 delí $2005^n - 5^n$, no 25 nedelí 2005, teda 25 nedelí $P(2005)$, hoci 5 delí $P(2005)$.

Iný postup: Rozanalyzujme $P(5)$, v ňom každý člen a_n5^n (pre n prirodzené) je deliteľný číslom 5, potom ale aj a_0 musí byť deliteľné 5, lebo 5 delí $P(5) = 2005$, ďalej platí, že každý člen a_n5^n pre $n \geq 2$ je deliteľný číslom 25, no 25 nedelí $P(5) = 2005$, teda 25 nemôže deliť ani $a_1.5 + a_0$. Uvažujme teraz $P(30)$, každý člen je deliteľný 5 (o a_0 sme si ukázali, že je deliteľné číslom 5 a koeficinety sú celé čísla), teda 5 delí $P(30)$, ďalej každý člen $a_n.30^n = a_n.5^n.6^n$ pre $n \geq 2$ je deliteľný číslom 25, teda na to, aby $P(30)$ bolo deliteľné číslom 25 (nutná podmienka aby $P(30)$ bolo druhou mocninou) je nutné aby aj 25 delilo $a_1.30 + a_0$, $a_1.30 + a_0 = 25.a_1 + 5a_1 + a_0$, teda muselo by platiť 25 delí $5a_1 + a_0$, čo je však spor s tým, že 25 nemôže deliť $a_1.5 + a_0$, aby 25 nedelilo $P(5)$. Podobne pri b) $2005.a_1 + a_0 = 25.80.a_1 + 5.a_1 + a_0$.

Komentár: Väčšina z vás si poradila s touto úlohou veľmi dobre, mnohé riešenia boli veľmi prehľadné. Niektorým však spôsobovala problém práca so všeobecným polynómom, strácali sa v označeniach, táto úloha si možno vyžadovala väčšiu dôslednosť.

3. Feri je milovníkom čokoládovej a vanilkovej zmrzliny. Každý deň si (náhodne) vyberie jednu z nich a dá si ju ako zákusok po obede. Katka sa rozhodla, že si bude viesť záznamy o tejto Ferkovej úchylke. Počas prvých dvoch týždňov v roku 2008 zistila, že Feri zjedol 10 čokoládových a 4 vanilkové zmrzliny. Po úmornom roku zapisovania prišla na to, že v roku 2008 zjedol Feri 244 čokoládových a 122 vanilkových zmrzlín.

a) Ukážte, že existuje 7 dní po sebe počas prvých dvoch týžňov Katkinho zapisovania, počas ktorých Feri zjedol práve 2 vanilkové zmrzliny.

b) Ukážte, že existuje 183 dní po sebe v roku 2008, keď Feri zjedol presne 122 čokoládových zmrzlín.

Opravovali: Veronika Kopčová a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 30**

Riešenie:

a) Za prvé dva týždne, teda za 14, dní zjedol Feri 10 čokoládových a 4 vanilkové zmrzliny. Keďže máme dokázať, že za 7 dní zjedol práve dve vanilkové zmrzliny, bolo by dobré, rozdeliť si 14 dní, teda 2 týždne na polovicu, teda 7 a 7 dní. Máme teraz 2 týždne a k nim 3 možnosti ako mohol Feri jesť vanilkové zmrzliny:

1. Zjedol práve 2 v prvom týždni a práve 2 v druhom týždni.
2. V prvom týždni zjedol viac ako 2 zmrzliny a v druhom menej.

3. V prvom týždni zjedol menej ako 2 zmrzliny a v druhom viac.

V prvom prípade je už podmienka, daná v zadaní splnená, pretože počas prvých 7 dní zjedol práve 2 vanilkové zmrzliny a aj počas posledných 7 dní zjedol práve 2 vanilkové zmrzliny. A teda existuje taký interval 7 dní, počas ktorých zjedol práve 2 vanilkové a sú aspoň 2. Druhý a tretí prípad sú symetrické, a teda stačí dokázať jeden z nich. Vezmime si napríklad možnosť, keď zjedol v prvý týždeň menej a druhý viac ako 2 vanilkové zmrzliny. Potrebujeme rozobrať všetky možné sedmice dní, a preto si potrebujeme nájsť systém, podľa ktorého budeme vedieť rozhodnúť o počte jednotlivých zmrzlín. Potrebujeme zistiť, ako sa zmení počet vanilkových zmrzlín pri prechode z jednej sedmice dní do druhej:

1. Ak v prvý deň zjedol vanilkovú a v ôsmy tiež vanilkovú, tak sa celkový počet vanilkových zmrzlín nezmení.
2. Ak v prvý deň zjedol čokoládovú a v ôsmy tiež čokoládovú, tak sa celkový počet vanilkových zmrzlín nezmení.
3. Ak v prvý deň zjedol vanilkovú a v ôsmy čokoládovú, tak sa celkový počet vanilkových zmrzlín zmenšil o 1.
4. Ak v prvý deň zjedol čokoládovú a v ôsmy vanilkovú, tak sa celkový počet vanilkových zmrzlín zväčšil o 1.

Teda vieme, že po každom posunutí sa počet vanilkových zmrzlín zmení o 0, 1, -1. Máme prípad, keď v prvom týždni zjedol menej a v druhom viac ako 2 vanilkové zmrzliny, takže sa potrebujeme postupným presúvaním dostať z čísla menšieho ako 2 na číslo vačšie ako 2, a to práve týmito troma sposobmi (posunutím o 0, 1, -1). Keďže sa zmrzliny posúvajú maximálne o 1 a medzi číslom menším ako 2 a vačším ako 2 je určite číslo 2, tak počet vanilkových zmrzlín určite niekedy nadobúdne hodnotu 2. A to sme mali dokázať.

b) Rok 2008 bol priestupným rokom, teda počet dní bol 366. Toto časové obdobie si znovu ako predtým rozdelíme na dve polovice, čo je 183 a 183 dní. Máme dokázať, že existuje 183 dní, počas ktorých zjedol Feri práve 122 čokoládových zmrzlín. Tak ako v možnosti a), máme 3 možnosti, ako mohol Feri jesť čokoládové zmrzliny:

1. Zjedol práve 122 v prvej polovici dní a práve 122 v druhej polovici dní.
2. V prvej polovici zjedol viac ako 122 zmrzlín a v druhej menej.
3. V prvej polovici zjedol menej ako 122 zmrzlín a v druhej viac.

Prvá možnosť je už dokázaná, tak ako v a). A pre druhú a tretiu možnosť platia tie isté podmienky ako v časti a). Znovu platí, že pri posúvaní z jednej časti 183 dní do nasledujúcej, sa počet zmrzlín zmení maximálne o 1. Keď máme v prvej polovici menej ako 122 zmrzlín a v druhej viac, tak sa postupným presúvaním dostávame z čísla menšieho ako 122 na číslo väčšie ako 122 a pri presune o maximálne 1 určite prejdeme aj cez číslo 122. Teda existuje 183 dní po sebe, kedy Feri zjedol práve 122 čokoládových zmrzlín.

Komentár: Zovšeobecnením častí a) a b) je tvrdenie: Nech Feri zjedol počas $2n$ dní $2k$ nejakých zmrzlín (pričom n a k sú prirodzené čísla). Potom existuje n po sebe idúcich dní, počas ktorých zjedol práve k daných zmrzlín. Skúste si toto tvrdenie sami dokázať.

4. Dávid rád vystrihuje rôzne útvary z papiera. Nedávno našiel starý papier na ktorom bola trojuholníková sieť, pričom sa skladala z trojuholníkov so stranami dĺžky 1. Papier bol dosť veľký na to, aby Dávid vedel vystrihnúť akýkoľvek útvar a navyše strihal len po čiarach. Vystrihnuté útvary nemusia byť konvexné.

a) Aký najmenší obsah môže mať vystrihnutý mnohouholník s obvodom 2009? Nájdite príklad a ukážte, že žiaden iný nemá menší obsah.

b) Musí byť ten mnohouholník, ktorý má spomedzi všetkých útvarov s obvodom 2009 najväčší obsah, konvexný?

c) Aký najväčší obsah môže mať vystrihnutý mnohouholník s obvodom 2009? Nájdite príklad a ukážte, že žiaden iný nemá väčší obsah.

Opravovali: Jakub Sedlák a Feri Kardoš **Počet riešiteľov: 28**

Riešenie:

a) V tejto časti máme zistiť aký je minimálny možný obsah útvaru vystrihnutého z trojuholníkovej siete s obvodom 2009. Poďme sa na problém pozrieť trochu všeobecnejšie. Uvažujme, ako môže vôbec výsledný útvar vyzerať. Ako mnohí riešitelia podotkli, aby sme skupinu trojuholníkov mohli pokladať za hľadaný útvar, musí byť každý z trojuholníkov spojený s jeho susedom aspoň jednou jeho stranou. Skúsme sa na tvorbu nášho útvaru pozrieť nie ako na vystrihovanie z veľkej plochy, ale zliepanie trojuholníkov od prvého až po posledný postupne, čoho výsledok je ekvivalentný s výsledkom vystrihánia. Poďme teda uvažovať: Čo sa deje s obvodom a obsahom pridávaním (priliepaním) nových trojuholníkov? Prvý má obsah 1 a obvod 3, k nemu keď stranou prilepíme ďalší, obsah sa samozrejme zvýši o 1, teda na 2 a obvod sa zvýši na 4. To je spôsobené zakrytím jednej strany, ktorá bola pôvodne na obvode a pridaním ďalších dvoch na obvod. Teda zvýšenie o 1. Ak pripojíme ďalší trojuholník k ľubovoľnej strane útvaru, obsah sa zvýši prirodzene o 1 a tretí trojuholník znova odoberie jednu stranu z obvodu a dve nové k nemu pripojí, čo znova znamená zvýšenie o 1. Toto zvýšenie je spôsobené pripojením nového trojuholníka k práve jednej strane trojuholníka z útvaru. No môže sa stať, že trojuholník sa naraz pripojí k dvom trojuholníkom už v útavre. Vtedy vidíme, že nový trojuholník ubral dve strany z pôvodného obvodu a do nového pridal len jednu, čo vo výsledku robí zmenšenie obvodu o 1. Existuje však ešte aj tretia možnosť a to taká, že nový trojuholník sa pripojí naraz k trom trojuholníkom, ktoré sú u» v útvare a tým neprispeje žiadnou stranou k novému obvodu a len uberie tri strany zo starého, čo vo výsledku spôsobí zmenšenie obvodu o 3.

Takto sme si rozobrali všetky možnosti, čo sa môže stať s obvodom pridaním nového trojuholníka k útvaru. Je to teda zväčšenie o 1, zmenšenie o 1, alebo zmenšenie o 3. A samozrejme, že obsah sa s každým novým trojuholníkom zväčšuje o 1.

Ak teda chcem dostať útvar s obvodom 2009 a obsahom minimálnym, takkeďže obsah stúpa konštantne a vieme ovplyvniť len zmenu obvodu, budeme sa teda snažiť o čo najväčší rast obvodu. A z predošlého rozboru vyplýva, že obvod vieme meniť o najviac +1 na každý nový trojuholník. Útvar s obvodom 2009 a minimálnym obsahom teda vieme dostať pripojením 2006 trojuholníkov k tomu prvému, čím sa pôvodný obvod 3 zväčší každým trojuholníkom o 1 teda na 2009. A obsah je teda 2007. Jediné pravidlo, ktoré teda pri tvorbe útvaru s minimálnym obsahom musíme dodržiavať je pripájať každý nový trojuholník k práve jednej strane trojuholníkov, ktoré sú už v útvare. Najjednoduchším príkladom mô»e byť teda u váš obľúbený lichobežník so stranami 1004, 1, 1003 a 1.

b) Ako riešiteľ vyslovím hypotézu, že ak má mať útvar s konštantým obvodom maximálny obsah, tak musí byť konvexný. Túto hypotézu teraz treba dokázať. Použijem dôkaz sporom:

Predpokladajme teda, že útvar s konštantým obvodom $= o$, má maximálny možný obsah a je nekonvexný. Ak je nekonvexný, znamená to, že niekde na jeho obvode sa vyskytuje aspoň 1 vrchol:

1. taký, že vnútorný uhol pri ňom je 300 stupňov (vonkajší je 60). Takéto miesto vieme doplniť o dva trojuholníky (zväčšíme jeho obsah) tak, že prvý dáme do konkávnosť tvornej štrbiny a druhý pripojíme k prvému. Prvý zmenšuje obvod o 1 a druhý ho naopak o 1 zväčšuje, čo znamená, že obvod sa pridaním týchto dvoch trojuholníkov nezmení. Obvod sme teda nezmenili a našli sme útvar s obahom o 2 väčším, čo je spor s tým, že pôvodný útvar mal najväčší možný obsah.

2. taký, že vnútorný uhol pri ňom je 240 stupňov (vonkajší je 120). Na takéto miesto vieme takisto prilepiť dva trojuholníky (pozri obrázok). Čím sme znova obvod nezmenili a obsah zvýšli o 2, čo je znova spor s tvrdením, že pôvodný útvar mal najväčší možný obsah, čo je dôkazom bez ohľadu na to, či novovzniknutý útvar je konvexný, alebo nie. Navyše ale z toho máme, že akýkoľvek nekonvexný útvar s daným obvodom o vieme opakovaním postupu v dôkaze doplniť na konvexný s rovnakým obvodom a určite väčším obsahom. Ale vyvstáva tu ešte jeden menší problém a to je, že náš postup vyplňovania nekonvexnosť-tvorných štrbín popísaný v dôkaze predpokladá, že na mieste, kam ideme štrbinu vyplniť je miesto (nieje tam iná časť útvaru). Treba teda

ešte popísať, čo sa deje, ak nastane takýto prípad. Naša doplnená dvojica trojuholníkov sa aspoň jedným svojim vrcholom spojí s ostatnou asťou útvaru, čím sa tá časť, ktorá týmto činom vytvorila akúsi lagúnu dá vyplniť ďalšími trojuholníkmi, čím sa pôvodný obvod značne zmenšuje a obsah naopak zväčšuje. Obsah sa teda pre náš dôkaz pozitívne zväčšil, no my chceme aby obvod nebol menší, ale rovnaký, ako v pôvodnom nekonvexnom útvare (údajne s najväčším obsahom). Náš novovzniknutý obvod vieme rozšíriť spôsobom popísaným v časti a) teda pridaním nových trojuholníkov tak, že každý novopridaný je spojený s útvarom len práve jednou svojou stranou.

Teraz je už dôkaz kompletný. Situáciu sme si rozdelili na všetky možnosti a o každej sme ukázali, že v nej akýkoľvek nekonvexný útvar s istým obvodom vieme popísaným postupom rozšíriť na konvexný útvar s obvodom rovnakým, no obsahom väčším. Z toho teda vyplýva, že útvar s konštantným obvodom o má maximálny obsah, ak je konvexný.
c) V časti b) sme teda zistili, že náš hľadaný útvar bude určite konvexný. Z b) tiež vyplýva, že ak vieme presunutím nejakých trojuholníkov (tak, že zachováme obvod aj obsah) vytvoriť v útvare nekonvexný uhol, tak, vieme tento útvar zväčšiť o konečný počet trojuholníkov, ktorý má rovnaký obvod. Konvexné útvary v rovnostranno-trojuholníkovej sieti sú trojuholník, štvoruholník, päťuholník a šesťuholník. Poďme sa pozieť, ktorý z nich má pri konštantom obvode maximálny obsah. Pozrieme sa najprv na trojuholník. Evidentne je to rovnostranný trojuholník. Všimnime si, že v každom trojuholníku so stranou väčšou ako 1, vieme presunúť trojuholníček tvoriaci vrchol na niektorú so zvyšných 2 strán, čo nezmení ani obvod, ani obsah. Vytvorí nám to však jedno alebo dve nekonvexné miesta, ktoré podľa b) vieme doplníť na konvexné, čo obvod nezmení, no obsah zväčší. Z toho vyplýva, že trojuholník určite nieje útvar s maximálnym možným obsah pri konštantnom obvode.
V štvoruholníku a päťuholníku sa takisto nachádza aspoň jeden trojuholníček pri vrchole, ktorý tvorý ostrý (60-stupňový) vnútorný uhol. Tento trojuholníček vieme znova presunúť na jednu so strán, čo vytvára nekonvexnosť a teda nieje útvarom s maximálnym možným obsahom pri konštantom obvode. Týmto sme ukázali, že útvar s maximálnym možným obsahom pri istom obvode je určite konvexný šesťuholník. Konvexných 6-uholníkov pre konkrétny obvod urobiť neúrekom. Všimnime si však, ak sú dĺžky strán tohto 6-uholníka priveľmi rozdielne, tak podobne, ako sme pri 3,4 a 5-uholníku presúvali trojuholník pri ostrom vnútornom uhle, tak môžeme pri 6-uholníku s dosť rozdielnymi dĺžkami strán presunúť celý pás (rovnoramenný lichobežník s ramenami dĺžky 1) trojuholníčkov pri najkratšej strane na stranu najdlhšiu (nemení to ani obsah ani obvod), čo znova vytvorí nekonvexné miesto v danom útvare a tým vieme, že to nie je ten správny útvar. Postupom popísaným v predošlom odseku vieme útvarom zväčšovať obsah a nemeniť obvod. Dokedy to však pôjde? Postup je, že obvodové pásy kratších strán pridávame k dlhším. A ak ich pridáme k najdlhším, tak vieme pridať najviac trojuholníčkov, čím obsah zväčšíme najviac. Tento postup je určite konečný, nakoľko sa dĺžky strán stále k sebe približujú. Tento postup už nebude možné opakovať, keď sa presunutím lichobežníka kratšej strany k dlhšej už nič nezmení. Poďme teda zistiť, kedy to je. šimnime si, že samotným odobraním lichobežníkového pásu z najkratšej strany sa dĺžka tejto strany zväčšila o 1 no zároveň sa dĺžky dvoch susedných zmenšili o 1. So zvyšnými troma nesusednými stranami sa nestalo nič. Až pridaním pásuk dlhšej strane sa táto zväčšila o 1. Preto sa obvod nezmenil. Znamená to, ale, že je rozdiel, či odstrihnutý pas prilepíme k su ednej, alebo nesusednej strane. Všimnime si, že ak bude nesusedná strana (vzhľadom k tej najkratšej, ktorej ideme odstrihnú pás) väčšia len o 1, tak prilepením pásu k nej, sa sitácia vôbec nezmení. Ak je ale dlhšia (nesusedná) strana väčšia o aspoň 2, tak na nej vznikne nekonvexné miesto, ktoré vieme doplniť na konvexné aspoň dvoma trojuholníčkami. Z toho teda vyplýva, že útvar, ktorému už nevieme pri konštantnom obvode zväčšiť obsah má rozdiel dvoch nesusedných strán najviac 1. Ako je to ale so susednými stranami? Keďže sa susedná strana odrezaním pruhu zmenší o 1 (o 1 sa priblíži tej najkratšej), tak na to, aby prilepením pruhu vznikla nekonvexnosť musia sa ich dĺžky líšiť taktiež aspoň o 1 po odrezaní. Takže o aspoň 2 pred odrezaním. Týmto sme vlastne dokázali, že každý útvar, ktorý má rozdiel dvoch nesusedných strán väčší ako

1 a rpzdiel dvoch susedných väčší ako 2 sa dá zväčšiť (obsahom) nezmenením obvodu a teda nemá najväčší obsah pri konštantom obvode. Obmena tejto vety je, že každý útvar, ktorý má rozdiel každých dvoch nesusedných strán najviac 1 a rozdiel každých dvoch susedných strán najviac 2 má pri konštantom obvode maximálny mo»ný obsah.

Zostáva už teda len nájsť 6-uholník spĺňajúci tieto podmienky, ktorý má obvod 2009. Bez ujmy na všeobecnosti si označme najkratšiu stranu (takú od ktorej neexistuje kratšia) ako n. Potom $2009 = (n)+(n+x_1)+(n+x_2)+(n+x_3)+(n+x_4)+(n+x_5)$, pričom $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ musí byť $6k+5$ (k je celé číslo), aby tento súčet dal obvod 2009 a zároveň platí, že najviac 2 z týchto strán (susedné k n) sú väčšie najviac o 2 a zvyšné 3 najviac o 1. $x1+x2+x3+x4+x5$ je teda najviac 7 a keďže to má byť $6k+5$, tak je to práve 5. Možnosti ako dostať súčtom piatich čísel 5 (pričom 2 z nich sú najviac 2 a zvyšné najviac 1) sú (0,0,1,2,2), (0,1,1,1,2) a (1,1,1,1,1). Jednoduchou skúškou (napríklad pre $n=1$) zistíme, že 6-uholík s dĺžkami ako je sú v prvej a tretej možnosti neexistuje a teda hľadaný 6-uholník má dĺžky strán $(n, n, n+1, n+1, n+1, n+2)$. n je teda 334 a strany sú 334,334,335,335,335,336 a umiestnenie je také, že 334-ky zvierajú medzi sebou 336-ku a 335-ky sú zvyšné 3. Našli sme teda útvar s obvodom 2009 a maximálnym možným obsahom. Treba už len daný obsah vyčísliť.

Môžeme si všimnúť, že náš útvar je ako keby pravidelný 6-uholník so stranou dlhou 335, ktorý má odrezaný jeden obvodový pás trojuholníčkov (lichobežník). Môžeme teda vypoítať obsah tohto pravidelného 6-uholníka potom od neho odpočítať lichobežník a bude to. Obsah pravidelného 6-uholníka so stranou 335 je šesťnásobkom obsahu pravidelného trojuholníka so stranou 335. Obsah tohoto trojuholníka môžeme počítať napríklad takto:

1(obsah vrcholového trojuholníčka) + (1+2)(obsah lichobežníka nad ním) + (2+3) + . . . + (334+335)(obsah najdlhšieho, obvodového, lichobežníka)=1+3+5+7+. . . +669, čo je súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti s diferenciou 2, čiže $= \frac{(1+669)335}{2} = \frac{700.335}{2} = 335^2$. Obsah pravidelného 6-uholníka so stranou 335 je teda 6.335^2. A obsah nášho útvaru je $6.335^2-(335+336)$(obsah obvodového lichobežníka) $=$ 672679.

Poradie po 3. sérii Letného semestra 33. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	H	CS
1.	Marek Kukan	3. B	GGrösBA	9	9	9	8	1	44
	Martin Bachratý	3. B	GOkruŽA	9	9	9	8	1	44
	Martin Vodička	Kvarta	GAlejKE	9	9	9	8	1	44
4.	Jana Baranová	Septima	GAlejKE	9	9	8	7	3	41
5.	Ivana Soláriková	Septima	GAlejKE	8	9	9	6	1	40
6.	Ladislav Bačo	3. A	GPoštKE	7	9	9	7	1	39
7.	Klára Ficková	1. A	GPoštKE	8	9	6	3	0	35
8.	Dávid Hvizdoš	2. A	GPoštKE	9	-	9	7	1	34
9.	Róbert Tóth	Septima	GAlejKE	5	9	9	4	0	32
	Monika Vaľková	Septima	GAlejKE	9	-	9	7	2	32
11.	Monika Zlaczka	2. A	GPoštKE	9	2	5	6	0	28
12.	Adam Midlik	7. A	GMudrPO	-	9	9	-	1	27
13.	Tomáš Babej	2. A	GPoštKE	9	-	2	6	1	23
14.	Matej Večerík	Sexta A	GTeplBA	-	-	9	6	0	21
15.	Katarína Révészová	2. A	GPoštKE	7	-	2	5	0	19
16.	Sven Relovský	1. A	GPoštKE	1	7	1	2	0	18
	Soňa Galovičová	1. B	GOkruŽA	9	-	-	-	0	18
18.	Ladislav Hovan	2. A	GExnáKE	-	-	9	4	0	17
19.	Viktor Szabados	2. B	GGrösBA	2	-	6	4	0	16
	Ivana Gašková	Kvinta	GAlejKE	6	-	2	2	0	16
21.	Matúš Stehlík	Sexta	GAlejKE	-	-	9	3	0	15
22.	Denisa Múthová	2.A	GRužiŽA	2	6	2	2	0	14
	Petra Zibrínová	2. D	GMudrPO	2	-	3	6	0	14
	Radovan Hnatič	1. A	GPoštKE	-	2	2	5	0	14
25.	Miroslava Vašková	2. D	GMudrPO	-	2	3	5	0	13
26.	Josef Tkadlec	??	GJKPraha	9	-	-	-	1	9
	Andrea Görcsösová	Septima	GAlejKE	9	-	-	-	0	9
	Jakub Kireš	1. A	GPoštKE	-	-	3	3	0	9
	Michal Anderle	Sexta	GHaliLC	2	-	-	5	0	9
30.	Kristína Faguľová	1. A	GPoštKE	4	0	-	-	0	8
	Jakub Šalagovič	Kvinta	GAlejKE	-	0	3	2	0	8
32.	Miloslav Homer	1. A	GPoštKE	-	0	1	3	0	7
33.	Daniel Till	1. A	GPoštKE	-	0	3	-	0	6
34.	Jozef Lami	1. A	GPoštKE	-	0	1	2	0	5
	Alexandra Pistráková	1. A	GPoštKE	-	1	2	-	0	5
36.	Jaroslav Petrucha	Kvarta	GMetoBA	-	-	-	-	0	0

Pohár konštruktérov Letného semestra 33. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	14	250
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	9	237
3.	GOkruŽA	Gymnázium Veľká okružná 22 011 09 Žilina	2	62
4.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	2	60
5.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	3	54
6.	GTeplBA	Gymnázium Teplická 7 831 02 Bratislava 3	1	21
7.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	17
8.	GRužiŽA	Gymnázium bilingválne T. Ružičku 3 010 01 Žilina	1	14
9.	GHaliLC	Gymnázium Haličská cesta 9 984 03 Lučenec	1	9
	GJKPraha	Gymnázium Jana Keplera Parléřova 2 169 00 Praha 6	1	9
11.	GMetoBA	Gymnázium Metodova 2 821 08 Bratislava 2	1	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2009 • Letný semester 33. ročníka (2008/2009)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`