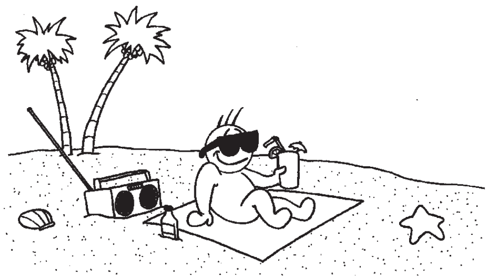
STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Čáááute, Stromáci!

Juch juch, školský rok sa končí, prichádza leto, super prázdniny a po tom všetkom aj dlho očakávaná odmena pre vás najlepších – sústredko plné zábavy a skvelých zážitkov. Dúfame, že ste sa aj tento rok niečo nové naučili a v budúcom školskom roku si na **STROM** spomeniete a opäť sa pustíte do riešenia úloh. Tešíme sa na vás. Vaši **STROM**isti



Riešenia 2. série úloh letného semestra 35. ročníka

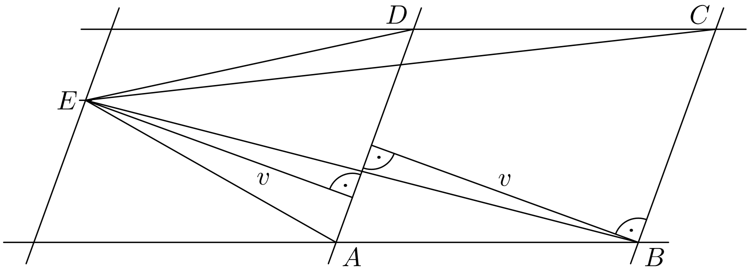
1. Daný je konvexný päťuholník $ABCDE$. Trojuholníky ABC, ABD, ACD a ADE majú rovnaký obsah S. Aký obsah má trojuholník BCE?

Opravoval: Janka Baranová **Počet riešiteľov: 32**

<u>Riešenie:</u>

Na začiatok tejto úlohy je dobré pripomenúť si vzorček pre obsah trojuholníka – počíta sa ako súčin dĺžky strany a výšky na ňu (úsečka kolmá na stranu trojuholníka prechádzajúca protiľahlým vrcholom) predelený dvomi. Z tohto vyplýva, že ak dva trojuholníky majú rovnaké obsahy a rovnako dlhú stranu, tak aj výšky týchto trojuholníkov na danú stranu budú mať rovnakú veľkosť.

Pozrime sa teraz na naše zadanie – trojuholníky ABD, ACD a ADE majú rovnaký obsah a majú spoločnú stranu AD, teda aj výšky na túto stranu majú rovnakú veľkosť. Päťuholník $ABCDE$ je konvexný, preto body B a C ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na AD, ale v opačnej ako bod E.



Čo môžeme povedať o bodoch B a C? Majú rovnakú vzdialenosť od priamky AD a zároveň ležia v rovnakej polrovine, teda určujú priamku BC, ktorá je s priamkou AD rovnobežná.

Naopak, čo vieme povedať o bodoch B a E? Majú rovnakú vzdialenosť od priamky AD, ale ležia v opačných polrovinách, teda výška v trojuholníku ADE (kolmá na AD) je zhodná s výškou v trojuholníku ADB (kolmou na AD) – označme ju v. Vzdialenosť (kolmá) bodu B od strany AD (teda výška v) je vlastne vzdialenosťou priamok AD a BC, keďže sú rovnobežné, teda v je kolmá aj na BC.

Pozrime sa teraz na obsah S trojuholníka ABC. Máme stranu BC a výšku v, teda vzdialenosť bodu A (resp. priamky AD) od strany BC, čiže $S = |BC| \cdot v/2$. Teraz je na rade náš slávny trojuholník BCE – opäť máme stranu BC, ale tentokrát výšku dĺžky $2v$ (je to vzdialenosť bodu E od BC, teda súčet vzdialeností bodu E od AD a priamky AD od BC), teda obsah tohto trojuholníka je

$$\frac{|BC| \cdot 2v}{2} = 2 \cdot \frac{|BC| \cdot v}{2} = 2S.$$

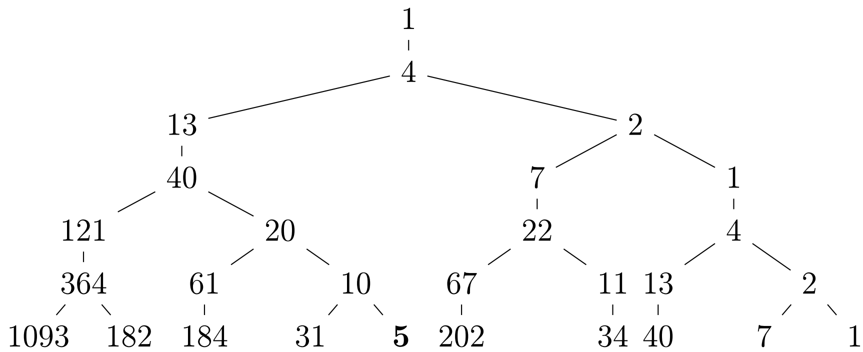
Takže sme zistili, že obsah trojuholníka BCE je $2S$.

Komentár: Úlohu ste v podstate všetci vyriešili, akurát v niektorých riešeniach bolo zopár nedostatkov. Hlavne ste zabúdali spomenúť, že body ležia v rovnakých (prípadne opačných) polrovinách, inak by tie vaše rovnobežné priamky neboli rovnobežnými, ako v prípade, že EC nie je rovnobežné s AD (to ste si všetci všimli, že nie sú, ale málokto dodal aj dôvod). Taktiež ste občas pozabudli dodať, že výška na BC (dĺžky $2v$) je naozaj výškou – teda, že je kolmá na BC. Niektorí z Vás v konečnom dôsledku ani nevyužili, že AD a BC sú rovnobežné, pričom to ukázali všetci. Inak si myslím, že úloha nedopadla zle – aj keď plný počet bodov až tak veľa z vás nemalo. Pri tejto (najjednoduchšej) úlohe bol problém skôr v presnom vyjadrovaní, ako vo vyriešení úlohy.

2. Na tabuli je napísaná jednotka. Ak je číslo na tabuli párne, môžeme ho zotrieť a napísať na tabuľu jeho polovicu. Hocikedy môžeme tiež číslo x na tabuli zotrieť a napísať tam $3x + 1$ (bez ohľadu na to, či x bolo párne alebo nie).
a) Najmenej koľko operácií treba spraviť, aby sme na tabuli získali číslo 5? (Zotretie čísla z tabule a napísanie nového chápeme ako jednu operáciu.)
b) Zistite, ktoré prirodzené čísla vieme získať na tabuli konečnou postupnosťou popísaných operácií.

Opravovali: Gaba Vozáriková a Veronika Kopčová **Počet riešiteľov: 28**
Riešenie:

V seminári STROM využijeme na riešenie tejto úlohy strom :-). Získame tak všetky čísla, ktoré možno dostať spôsobom zo zadania, až do istej úrovne. Skončíme vetvenie pri prvom výskyte čísla 5. Tento strom nám zaručí, že na menej krokov číslo 5 dostať nemôžeme.



Ako možno odčítať zo stromu, na dosiahnutie čísla 5 potrebujeme najmenej 6 krokov.

b) Pri prezeraní čísel zo stromu z predošlej časti úlohy nám ako prvé padne do očí, že sa tam nenachádzajú žiadne čísla deliteľné číslom 3. Naozaj žiadne také číslo nemožno dosiahnuť? Keď to chceme dokázať korektne, použijeme matematickú indukciu vzhľadom na úroveň v strome.
Tvrdíme, že v úrovni n sú všetky čísla nedeliteľné tromi. Pre úroveň jedna máme jedinú hodnotu, a to 1, čo je číslo nedeliteľné tromi, čiže tvrdenie pre túto úroveň platí. Nech tvrdenie platí pre úroveň n, chceme ukázať, že platí aj pre úroveň $n+1$. Nech k je ľubovoľné číslo z tejto $(n+1)$. úrovne. Muselo vzniknúť z nejakého čísla m z n-tej úrovne. Ak bola pritom použitá operácia $3 \cdot m + 1$, tak evidentne dostaneme číslo nedeliteľné tromi. Ak vzniklo druhým spôsobom, teda $k = m/2$, čo je ekvivalentné tomu, že

$$m = 2 \cdot k, \tag{1}$$

z indukčného predpokladu máme, že m je nedeliteľné tromi, preto využitím vzťahu (1) máme, že aj k musí byť nedeliteľné tromi. Keďže k bolo ľubovoľné číslo $(n + 1)$. úrovne, dokázali sme, že platí tvrdenie aj pre úroveň $n + 1$. Dôkaz matematickou indukciou je teda kompletný.
Čo však čísla nedeliteľné tromi? Dá sa každé z nich dostať konečným počtom krokov? To sa však už nepodarilo dokázať ani vyvrátiť nikomu z vás, preto ak ste sa nad týmto problémom zamýšľali a zdalo

sa vám, že ste na dobrej ceste, tak smelo ďalej! Máte totiž možnosť získať navyše 5 prémiových bodov do ďalšej zimnej série STROMu.
Pre tých, čo úloha zaujala alebo majú estetické cítenie pre krásne fraktály, jeden link týkajúci sa príbuzného problému `http://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture`. Veľa je toho v matematike ešte stále otvorené :-).

3. Prirodzené čísla od 1 do 999999 sú rozdelené do dvoch skupín: na tie, ktorých najbližší štvorec prirodzeného čísla je nepárny a tie, ktorých najbližší štvorec prirodzeného čísla je párny (ak je samotné číslo štvorcom prirodzeného čísla, tak najbližší štvorec k nemu je ono samo). Súčet čísel v ktorej skupine je väčší?

Opravovali: Robčo Tóth a Peťo Milošovič **Počet riešiteľov: 20**
Riešenie:

Najprv si ujasnime, ktoré čísla kam zaradíme. Medzi dvomi štvorcami n^2 a $(n+1)^2$ sa nachádza práve $2n$ čísel, teda najväčšie číslo, ktorého bližším štvorcom je n^2, bude n^2+n a najmenšie číslo, ktorého bližším štvorcom je $(n+1)^2$, bude n^2+n+1.
Skúsme sa teraz pozrieť na prvých pár čísel. Pri čísle 3 (1+2=3) sa súčty rovnajú, takisto pri čísle 8 (4+5+6=7+8) a pri čísle 15 (9+10+11+12=13+14+15). Vyzerá to tak, že súčet po sebe idúcich čísel od n^2 po n^2+n je rovný súčtu čísel od n^2+n+1 po $(n+1)^2-1$. Naším posledným číslom je 999999, čo je 1000^2-1, preto vieme všetky čísla prideliť do týchto intervalov.
Keďže sme schopní zrátať súčet všetkých po sebe idúcich prirodzených čísel od k po l:

$$k+(k+1)+\cdots+l=\frac{(l-k+1)\cdot(k+l)}{2},$$

tak ľahko overíme, či náš predpoklad platí aj všeobecne. Prvý súčet je rovný

$$n^2+(n^2+1)+\cdots+(n^2+n)=\frac{(n^2+n-n^2+1)\cdot(n^2+n+n^2)}{2}=\frac{(n+1)\cdot(2n^2+n)}{2}=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}.$$

Druhý súčet je rovný

$$\begin{aligned}&(n^2+n+1)+(n^2+n+2)+\cdots+((n+1)^2-1)=\\&=\frac{((n+1)^2-1-(n^2+n+1)+1)\cdot(n^2+n+1+(n+1)^2-1)}{2}=\\&=\frac{n\cdot(2n^2+3n+1)}{2}=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}.\end{aligned}$$

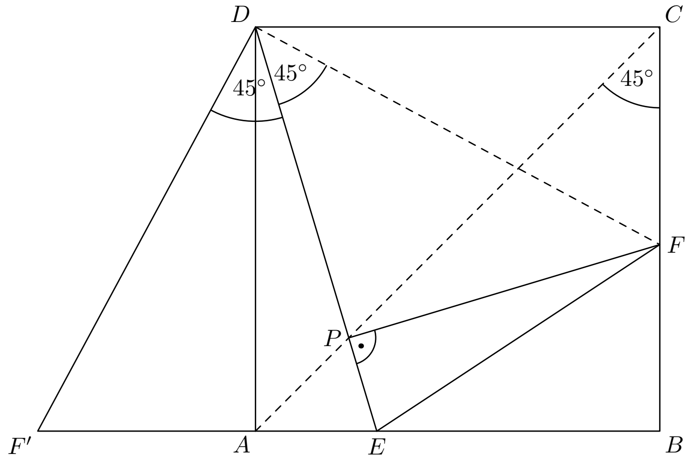
To znamená, že v našom prípade bude súčet čísel, ktoré majú bližšie štvorec nepárneho čísla, rovnaký ako súčet tých, ktoré majú bližšie štvorec čísla párneho.

Komentár: Pár riešiteľov nezvládlo základný úkon, a to prečítanie zadania. Okrem nich však takmer všetci dospeli k správnemu výsledku a deväťbodových riešení nebolo málo.

4. Daný je štvorec $ABCD$. Zvoľme bod E vnútri strany AB a označme P priesečník úsečky DE s uhlopriečkou AC. Bod F je priesečníkom kolmice na priamku DE v bode P s priamkou BC. Dokážte, že $|AE|+|FC|=|EF|$.

Opravovali: Marek Derňár a Tomáš Babej **Počet riešiteľov: 16**
Riešenie:

Chceme dokázať, že $|AE|+|CF|=|EF|$, čiže súčet dĺžok dvoch úsečiek sa rovná dĺžke tretej. Veľmi často sa pri takýchto úlohách použije to, že tie dve rôzne úsečky presunieme na jednu priamku. K tomu nám môže pomôcť nejaké vhodné zhodné zobrazenie. Skúsme teda otočiť trojuholník CFD okolo bodu D o uhol $-90°$. Bod C sa potom zobrazí do bodu A, bod F do F' a bod D sám do seba (viď obrázok).

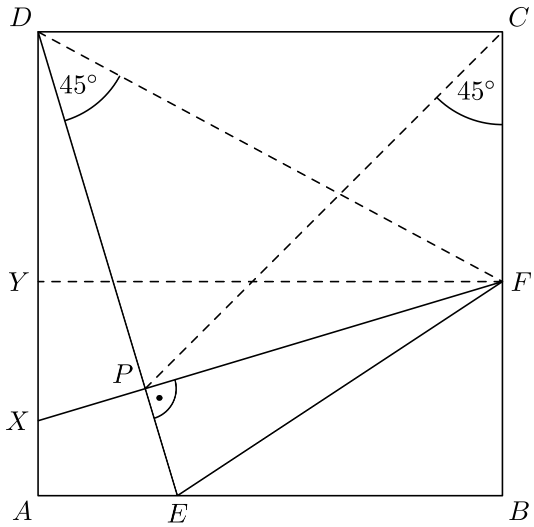


Platí teda

$$|AE| + |CF| = |AE| + |AF'| = |F'E|,$$

čiže nám stačí ukázať $|EF| = |F'E|$. V tejto úlohe máme veľa pravých uhlov, ktoré vytvárajú kopec tetivových štvoruholníkov. Skúsme to teda použiť. Ako iste viete, štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet veľkostí protiľahlých uhlov je 180°. Zrejme štvoruholník $PFCD$ je tetivový, keďže uhly DPF a DCF sú pravé, a teda súčet ich veľkostí je $90° + 90° = 180°$. Dá sa mu teda opísať kružnica a podľa vety o obvodovom uhle majú uhly PCF a PDF rovnakú veľkosť. Keďže trojuholník ABC je rovnoramenný pravouhlý, tak $|\sphericalangle PDF| = |\sphericalangle PCF| = 45°$. Vieme, že $|\sphericalangle F'DF| = 90°$ (išlo o otočenie o uhol $-90°$), teda $|\sphericalangle F'DE| = 90° - 45° = 45°$. Pri otočení o $-90°$ okolo bodu D sa úsečka DF zobrazila do DF', čiže $|DF| = |DF'|$. Podľa vety *sus* sme teda ukázali, že trojuholníky DFE a $DF'E$ sú zhodné, čiže $|EF| = |EF'|$, čo sme chceli dokázať.

<u>Iné riešenie:</u>
Pri inom riešení môžeme naopak vhodne „presunúť“ úsečku EF, napr. na stranu štvorca. Na to nám opäť môžu poslúžiť nejaké zhodné trojuholníky.



Rovnako ako pri prvom riešení vieme ukázať $|\sphericalangle PDF| = 45°$, čiže trojuholník PDF je rovnoramenný pravouhlý, teda $|DP| = |PF|$. Označme teraz X prienik priamky PF s úsečkou AD. Štvoruholník $AEPX$ je tetivový ($|\sphericalangle XAE| + |\sphericalangle EPX| = 90°+90° = 180°$), teda podľa vety o obvodovom uhle $|\sphericalangle EXP| = |\sphericalangle EAP| = 45°$. Trojuholník XEP je tiež rovnoramenný pravouhlý a platí $|XP| = |EP|$.
To nám už stačí na to, aby sme dokázali zhodnosť trojuholníkov PEF a PXD ($|XP| = |EP|$, $|DP| = |PF|$ a uhly XPD a EPF sú vrcholové, teda podľa vety *sus* sú tieto dva trojuholníky zhodné). Keďže z tejto zhodnosti vyplýva že $|XD| = |EF|$, stačí nám ukázať, že $|XD| = |AE|+|CF|$. Zostrojme kolmicu na stranu AD cez bod F a pätu tejto kolmice označme Y. Vidíme, že $YFCD$ je obdĺžnik, teda $|CF| = |DY|$. Keďže Y je vždy vnútorný bod XD (je to päta výšky v trojuholníku XFD, ktorý je ostrouhlý), tak $|XD| = |XY| + |YD|$. Chceme ukázať, že $|XD| = |XY| + |YD| = |AE| + |CF|$. Platí však $|CF| = |DY|$, teda stačí ak ukážeme $|XY| = |AE|$. Na to znova skúsime použiť zhodné trojuholníky.
Pozrime sa na trojuholníky AED a YXF. Zrejme $|AD| = |YF|$ (dĺžka strany štvorca $ABCD$) a uhly EAD a XYF sú pravé. Aby tieto trojuholníky boli zhodné, stačí napríklad ukázať, že $|ED| = |XF|$. To však platí, keďže trojuholníky XEP a DPF sú rovnoramenné:

$$|ED| = |EP| + |PD| = |XP| + |PF| = |XF|.$$

Podľa vety *Ssu* sme teda dokázali zhodnosť trojuholníkov AED a YXF, čiže $|XY| = |AE|$, z čoho vyplýva $|AE| + |CF| = |EF|$.

<u>Iné riešenie:</u>
Úloha sa veľmi jednoducho dala vyriešiť analyticky. Stačí si zvoliť takú karteziánsku súradnicovú sústavu, že jej jednotkou je práve dĺžka strany štvorca $ABCD$. Body A, B, C, D a E potom umiestnime tak, že $A[0,0]$, $B[1,0]$, $C[1,1]$, $D[0,1]$ a $E[e,0]$, pričom $0 \le e \le 1$. Jednoducho už potom

vieme vyjadriť súradnice bodov P (prienik priamok ED a AC) a F (prienik kolmice na DE v bode P s priamkou BC). Vyjadrením dĺžok $|AE|$, $|CF|$ a $|EF|$ už jednoducho ukážeme platnosť vzťahu $|AE| + |CF| = |EF|$ – skúste si to sami.

Komentár: Vyskytlo sa viacero rôznych postupov ako dospieť k riešeniu a mnohé z nich boli veľmi pekné a originálne. Pri analytických riešeniach sme občas museli strhnúť bod za nespomenutie podmienok.

5. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre každú trojicu reálnych čísel x, y, z platí

$$f(x + f(y + z)) + f(f(x + y) + z) = 2y.$$

Opravovali: Edo Eiben a Dávid Hvizdoš **Počet riešiteľov: 14**
Riešenie:

Vzťah $f(x + f(y + z)) + f(f(x + y) + z) = 2y$ platí pre všetky reálne x, y, z a teda musí platiť, aj keď za x a z zvolíme nulu a teda $2f(f(y)) = 2y$. Z toho po vydelení celej rovnice dvoma dostávame:

$$f(f(y)) = y.^1 \tag{2}$$

Ďalej dosadením $x = y = 0$ do pôvodnej funkcionálnej rovnice získame

$$f(f(z)) + f(f(0) + z) = 0 \tag{3}$$

a použitím (2) máme

$$f(f(0) + z) = -z, \tag{4}$$

čo platí pre všetky reálne z, keďže na z sme nekládli žiadnu podmienku zatiaľ.
Stačí si teraz uvedomiť, že pre každú takúto funkciu f je $f(0)$ konštanta, a tak môžeme v (4) posunúť číslo z o túto konštantu. Teda nech t je také reálne číslo, že $t = z+f(0)$. Po dosadení do (4) dostaneme

$$f(t) = f(0) - t$$

taktiež pre každé reálne t.
Zatiaľ však ešte nevieme, pre ktoré hodnoty konštanty $f(0)$ bude nájdená funkcia naozaj aj vyhovovať zadaniu. To zistíme jednoduchým dosadením do zadania:

$$\begin{aligned}
f(x + f(y + z)) + f(f(x + y) + z) &= 2y \\
f(x + f(0) - y - z) + f(f(0) - x - y + z) &= 2y \\
f(0) - (x + f(0) - y - z) + f(0) - (f(0) - x - y + z) &= 2y \\
2y &= 2y
\end{aligned}$$

Zistili sme teda, že pre ľubovoľnú reálnu hodnotu konštanty $f(0)$ nájdená funkcia spĺňa zadanie. Zadaniu teda vyhovuje každá funkcia tvaru $f(x) = c - x$, kde x je reálny argument a c je ľubovoľná reálna konštanta.

[1] S týmto vzťahom sa pri riešení funkcionálok stretávame častejšie. Je dobré poznamenať, že z neho vyplýva, že hľadaná funkcia musí byť prostá, teda pre rôzne čísla x a y nadobúda funkcia rôzne hodnoty. Pretože, ak pre x a y platí $f(x) = f(y)$, tak aj $f(f(x)) = f(f(y))$, a preto $x = y$. Taktiež táto funkcia musí byť surjektívna, teda sa zobrazí na celú množinu. Ak chceme dostať $f(x) = y$, stačí za x zvoliť $f(y)$, čo je určite z definičného oboru, keďže obor hodnôt aj definičný obor je rovnaký. Ak teda o funkcii vieme, že platí $f(f(y)) = y$, tak môžeme s ňou robiť operácie ako „odfunkčnenie“, teda ak $f(x) = f(y)$, potom $x = y$. Taktiež môžeme dosadzovať za $f(x)$ ľubovoľnú hodnotu, lebo vieme, že ju pre nejakú hodnotu x dosiahne.

Iné riešenie: (podľa Maťa Vodičku)
Dosadením $x = z = t - f(0)$, $y = f(0) - t$ dostaneme

$$f(t) = f(0) - t,$$

čo po skúške vyhovuje pre ľubovoľné $f(0)$.

6. Nech $a > b > 1$ sú také celé čísla, že $a + b$ delí $ab + 1$ a zároveň $a - b$ delí $ab - 1$. Dokážte, že potom $a < b\sqrt{3}$.

Opravovali: Laco Bačo a Matúš Stehlík **Počet riešiteľov: 6**

Riešenie:

V riešení budeme označovať najväčšieho spoločného deliteľa čísel x a y ako (x, y).
Všimnime si najprv, čo je našou úlohou. Máme dokázať nejakú nerovnosť pre čísla a, b. Okrem toho ešte vieme, že $a > b > 1$ a tiež máme v zadaní dve podmienky o deliteľnosti pre výrazy zložené z čísel a a b. Vhodnou otázkou môže byť: Ako z nejakých deliteľností získať nerovnosť? V tomto riešení využijeme vlastnosť, že absolútna hodnota deliteľa môže byť nanajvýš taká veľká ako absolútna hodnota delenca.

Ako prvé ukážeme, že čísla a a b sú nesúdeliteľné.
Nech je $(a, b) = D$. Zrejme[2] $D \mid (a + b)$, ďalej podľa zadania $(a + b) \mid (ab + 1)$, takže $D \mid (ab + 1)$. Keďže aj $D \mid ab$, tak aby platilo $D \mid (ab + 1)$, musí platiť aj $D \mid 1$, čiže $D = 1$.

Ďalej ukážeme, že oba výrazy $(a + b)$ a $(a - b)$ delia číslo $(b^2 - 1)$.
Zo zadania $(a - b) \mid (ab - 1)$ aj $(a - b) \mid b \cdot (a - b)$, preto $(a - b) \mid (ab - 1) - b \cdot (a - b) = (b^2 - 1)$.
Podobne $(a + b) \mid (ab + 1)$ aj $(a + b) \mid b \cdot (a + b)$, teda musí $(a + b) \mid (ab + 1) - b \cdot (a + b) = -(b^2 - 1)$, takže $(a + b) \mid (b^2 - 1)$.

Teraz trochu odbočíme a ukážeme jeden užitočný poznatok: nech A, B, C, D sú celé čísla, pričom $A \mid C$, $B \mid C$ a $D = (A, B)$. Potom je číslo $A \cdot B$ deliteľom čísla $C \cdot D$.
V dôkaze tohto tvrdenia označme[3] $A = \alpha \cdot D$, $B = \beta \cdot D$, $C = \gamma \cdot D$, kde α, β, $\gamma \in \mathbb{Z}$. Vieme, že $(A, B) = D$, preto musí byť $(\alpha, \beta) = 1$. Zároveň je číslo γ deliteľné obomi číslami α aj β. Keďže sú tieto dve čísla nesúdeliteľné, tak je číslo γ deliteľné aj ich súčinom, čiže potom

$$A \cdot B = D^2 \cdot \alpha \cdot \beta \mid D^2 \cdot \gamma = C \cdot D,$$

čo sme chceli ukázať.

Aplikujme tento poznatok na čísla $a + b$, $a - b$, $b^2 - 1$. Nech $d = (a + b, a - b)$, potom

$$(a^2 - b^2) \mid d \cdot (b^2 - 1).$$

Všimnime si, že už sa to celkom podobá na to, čo chceme dostať, pretože deliteľ je nanajvýš taký veľký ako delenec[4]. Z toho dostávame nerovnosť

$$a^2 - b^2 \leq d \cdot (b^2 - 1) \Rightarrow a^2 \leq (d + 1) \cdot b^2 - d < (d + 1) \cdot b^2. \tag{5}$$

Teraz už len potrebujeme zistiť niečo o d. Vieme, že $d \mid (ab - 1)$ a tiež $d \mid (ab + 1)$, keďže $d \mid (a - b)$ a $d \mid (a + b)$. Tým pádom platí

$$d \mid (ab - 1, ab + 1) \Rightarrow d \mid (ab - 1, 2) \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d \leq 2.$$

[2] $x \mid y$ znamená „x delí y“
[3] keďže $D|A$ a $A|C$, tak aj $D|C$
[4] vďaka nerovnosti zo zadania sú obe tieto čísla kladné

To je však presne to, čo sme potrebovali. Pomocou tohto odhadu dostávame z nerovnosti (5) nerovnosť

$$a^2 < (d+1) \cdot b^2 \leq 3b^2.$$

Obe strany sú nezáporné, takže odmocnením získavame vytúženú nerovnosť $a < b\sqrt{3}$.

Konečné poradie Letného semestra 35. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	S	1.	2.	3.	4.	5.	6.	B	CS
1.	Martin Vodička	Sexta	GAlejKE	50	9	-	9	9	8	9	8	102
2.	Katarína Krajčiová	Kvarta	GAlejKE	51	8	8	1	9	8	-	9	94
3.	Klára Ficková	3. A	GPoštKE	46	9	8	9	8	9	-	0	89
4.	Miroslav Stankovič	1. A	GPoštKE	49	8	-	9	-	9	-	9	84
5.	Kristína Faguľová	3. A	GPoštKE	45	9	8	3	8	7	-	0	80
6.	Ľudmila Šimková	Kvinta	GPároNR	35	8	6	9	8	-	-	9	75
7.	Irena Bačinská	Kvinta	GKomeLY	29	7	8	9	3	6	1	9	71
	Dorota Jarošová	Kvarta	GAlejKE	37	8	8	-	9	-	-	9	71
9.	Pavol Koprda	Septima A	GHvieTT	32	6	8	9	8	6	1	0	70
10.	Miloslav Homer	3. A	GPoštKE	34	8	8	9	9	-	-	0	68
11.	Daniel Till	3. A	GPoštKE	28	8	8	6	9	2	3	0	64
12.	Viktor Lukáček	3. C	GŠevčPO	34	9	6	2	-	9	-	0	60
	Michal Kopf	3. A	GSlezCZ	33	9	-	9	-	9	-	0	60
14.	Ladislav Hovan	4. A	GExnáKE	27	8	2	9	-	9	-	0	55
15.	Lucia Magurová	2. A	GPoštKE	28	9	8	-	9	-	-	0	54
	Dominik Teiml	4. AK	GEColCZ	29	8	8	-	-	9	-	0	54
17.	Vladislav Vancák	Kvinta B	GAlejKE	28	8	8	-	-	-	-	8	52
18.	Linda Hanslíková	2. A	GSlezCZ	30	7	7	3	-	4	-	0	51
	Ján Jursa	1. A	GPoštKE	33	6	6	-	-	-	-	6	51
20.	Štěpán Šimsa	6. S	GJJLit	0	7	8	9	8	9	6	7	48
	Matúš Hlaváčik	Sexta	GAlejKE	48	-	-	-	-	-	-	0	48
	Zuzana Baxová	3. E	G1májTN	16	8	6	9	9	-	-	0	48
23.	Martin Rapavý	Kvinta A	GAlejKE	25	7	6	-	-	-	-	7	45
24.	Anton Gromóczki	9. A	ZStanKE	26	6	6	-	-	-	-	6	44
	Barbora Marečáková	Septima	GKukuPP	22	7	8	-	7	-	-	0	44
26.	Jozef Lelič	3. A	GPoštKE	17	8	5	3	8	-	-	0	41
27.	Marek Galajda	2. A	GZbroKE	15	8	8	-	-	-	-	0	31
28.	Ivana Gašková	Septima	GAlejKE	14	7	7	2	-	-	0	0	30
29.	Roman Pivovarník	Kvinta A	GMudrPO	8	7	6	-	-	-	-	7	28
30.	Patrícia Lakatošová	Kvarta	GsvEdKE	24	-	-	-	-	-	-	0	24
31.	Martina Oravcová	1. A	GPoštKE	2	7	3	1	3	-	-	7	23
32.	Augustín Žídek	3. B	GFrydCZ	21	-	-	-	-	-	-	0	21
33.	Peter Hojnoš	1. E	GŠkolSN	19	-	-	-	-	-	-	0	19
34.	Alexandra Pistráková	3. A	GPoštKE	10	8	-	-	-	-	-	0	18
	Ján Dudič	2. A	GPoštKE	4	5	8	1	-	-	-	0	18
36.	Vladimír Macko	2. A	GHronZV	17	-	-	-	-	-	-	0	17
37.	Mária Orendáčová	1. A	GPoštKE	16	-	-	-	-	-	-	0	16
38.	Veronika Koľveková	3. A	GPoštKE	13	-	-	-	-	-	-	0	13

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	S	1.	2.	3.	4.	5.	6.	B	CS
39.	Marcel Frančák	2. B	GMierNO	2	4	3	-	-	-	-	0	9
40.	Daniel Ondra	1. A	GPoštKE	8	-	-	-	-	-	-	0	8
41.	Lucia Floriánová	1. A	GPoštKE	6	-	-	-	-	-	-	0	6
42.	Marcel Češelka	2. C	GŠkulKE	3	-	-	-	-	-	-	0	3

Pohár konštruktérov Letného semestra 35. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	15	633
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	7	442
3.	GSlezCZ	Slezské Gymnázium Zámecký okruh 29 746 01 Opava	2	111
4.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	75
5.	GKomeLY	Gymnázium Komenského 13 082 71 Lipany	1	71
6.	GHvieTT	Gymnázium Angely Merici Hviezdoslavova 10 917 01 Trnava	1	70
7.	GŠevčPO	Gymnázium sv. Moniky Tarasa Ševčenka 1 080 01 Prešov	1	60
8.	GExnáKE	Gymnázium Exnárova 10 040 22 Košice	1	55
9.	GEColCZ	The English College in Prague Sokolovská 320 190 00 Praha 9	1	54
10.	G1májTN	Gymnázium 1. mája 2 911 01 Trenčín	1	48
	GJJLit	Gymnázium Josefa Jungmanna Svojsíkova 1 412 65 Litoměřice	1	48
12.	GKukuPP	Gymnázium Kukučínova 058 39 Poprad	1	44
	ZStanKE	Základná škola Staničná 13 040 01 Košice	1	44
14.	GZbroKE	Gymnáz. sv.T.Akvinského Zbrojničná 3 040 01 Košice	1	31
15.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	1	28
16.	GsvEdKE	Gymnázium sv. Edity Steinovej Charkovská 1 040 22 Košice	1	24
17.	GFrydCZ	Gymnázium Náměstí T.G.M. 1260 73911 Frýdlant nad Ostravicí	1	21
18.	GŠkolSN	Gymnázium Školská 7 052 01 Spišská Nová Ves	1	19
19.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	17
20.	GMierNO	Gymnázium A. Bernoláka Mieru 307/23 029 01 Námestovo	1	9
21.	GŠkulKE	Evanjelické gymnázium Škultétyho 10 040 01 Košice	1	3

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2011 • Letný semester 35. ročníka (2010/2011)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`