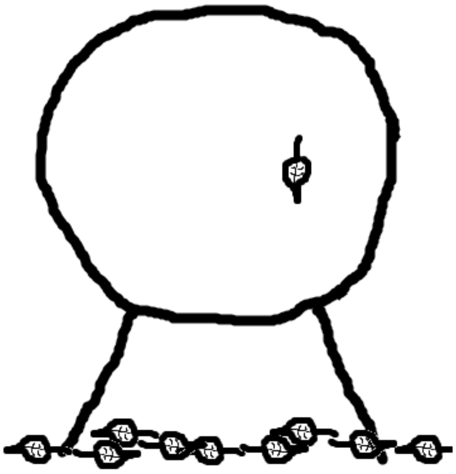
STROM
Korešpondenčný matematický seminár



Ahojte Stromáci,

Mnohí z vás si teraz utierajú pot z čela a kušú v školách zárubne. Nervozita sa dá krájať. Ani holub, čo ešte pred chvíľou šantil na parapete, to už nevydržal a radšej rýchlo uletel. Je to tak, sú tu výsledky prvej série a s nimi kopu radosti, ale aj kopu žiaľu. Tí šťastní, nezaspite na vavrínoch, nejeden sa už takto popálil. Tí smutní, pridajte plyn, tí šťastní aj tak odignorovali predošlú vetu a niekde v pozadí otvárajú šampanské. Stretneme sa v cieli!

vaši **STROM**isti

Riešenia 1. série úloh Zimného semestra 36. ročníka

1. Rozhodnite, či sa dajú prirodzené čísla rozdeliť na dve skupiny tak, aby v žiadnej z týchto skupín neboli tri čísla, z ktorých jedno je aritmetickým priemerom ostatných dvoch. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Opravovali: Tomáš Kocák a Monča Vaľková **Počet riešiteľov: 48**
Riešenie:
Pozrime sa, ako by také dve skupiny vyzerali, ak by sa nám podarilo rozdeliť všetky prirodzené čísla podľa zadania. V jednej skupine by isto museli byť dve dostatočne veľké čísla s rovnakou paritou vzdialené o 2 (pre naše potreby vezmeme napríklad dve po sebe idúce párne A a B väčšie ako 4). Ak by tam neboli, znamenalo by to, že párne čísla od šestky sú striedavo v prvej a druhej skupine, teda napríklad 6, 10 a 14 by boli spolu. To by znamenalo, že sme prirodzené čísla rozdelili zle, pretože 10 je aritmetickým priemerom 6 a 14.
Nech teda do prvej skupiny patria po sebe idúce párne čísla A a B. Potom do prvej skupiny nemôže patriť číslo $(A+B)/2$, lebo je priemerom A a B. Toto číslo je teda v druhej skupine. Takisto do prvej skupiny nemôže patriť číslo $2A-B$, lebo priemer $2A-B$ a B by bol A. Takisto priemer $2B-A$ a A by bol B. Aj tieto čísla teda patria do druhej skupiny.
V druhej skupine teda musia byť čísla $2A-B$, $2B-A$ a $(A+B)/2$, čo už je spor, lebo jedno je priemerom zvyšných dvoch, konkrétne $((2A-B)+(2B-A))/2 = (A+B)/2$. Z tohto sporu vyplýva, že prirodzené čísla sa do dvoch skupín nedajú rozdeliť tak, aby boli splnené podmienky zo zadania.
Poznámka: Ak by sme nepožadovali aby A a B museli byť dostatočne veľké, tak napríklad pre $A=2$ a $B=4$ by číslo $2A-B$ bolo 0, čo nie je prirodzené číslo.

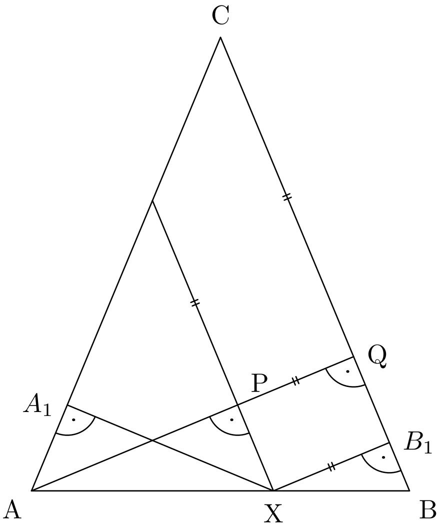
Komentár: K úlohe ste pristupovali dvoma spôsobmi. Prvým bolo skúsiť rozdeliť čísla od 1 do 10, čo sa nedalo. Stačilo na to odskúšať pár možností. Tento spôsob síce bol iba jednoduché odskúšanie, ale bola to istota, lebo nikto pri ňom nestratil body. Druhý prístup bol krajší, ale dalo sa v ňom zabudnúť na malé detaily. V ňom ste sa väčšinou vyhli konkrétnym číslam a vymysleli ste nejaký všeobecný dôvod, prečo sa to nedá. Body sme strhávali iba za maličkosti, napríklad keď ste v riešení podobnom vzorovému zabudli povedať, že vaše čísla A a B nemôžu byť 2 a 4.

2. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC. Na základni AB zvolíme bod X a vypočítame súčet vzdialeností bodu X od ramien trojuholníka ABC. Ukážte, že hodnota tohto súčtu nezávisí od voľby bodu X.

Opravovali: Peťo Milošovič a Robčo Tóth **Počet riešiteľov: 58**

Riešenie:

Povedzme si najprv, ako vo všeobecnosti dokázať, že nejaká dĺžka, súčet dĺžok, obsah, alebo iná vec nezávisí od niečoho druhého. V takýchto úlohách je potrebné cieľový výraz (v našom prípade súčet dvoch dĺžok) vyjadriť ako súčet iných výrazov, ktorých hodnota na prvý pohľad závisí len od dopredu daných parametrov. Uvediem príklad. Ak by sa nám podarilo dokázať, že hodnota $|A_1X| + |B_1X|$ je rovná sedemnásobku obsahu trojuholníka ABC, sme veľmi radi, lebo tento obsah je niečo, čo je pre dopredu daný trojuholník vždy rovnaké bezohľadu na voľbu bodu X. Naopak, ak ukážeme, že je tento súčet rovný tretine obvodu trojuholníka XCB_1, nie sme spokojní, lebo hodnota tohto výrazu závisí od voľby bodu X (aspoň na prvý pohľad, možno to je v skutočnosti presne to isté, čo v prvom prípade, ale to opravovateľ nemôže vedieť). Uvedieme tri typy riešení.



Prvé riešenie: Pokúsme sa vyjadriť dĺžky $|A_1X|$ a $|B_1X|$ inak. Vidíme, že tieto úsečky tvoria výšky v trojuholníkoch ACX a ABX, čo sa nám môže hodiť, keďže dĺžky strán prislúchajúce k týmto výškam sú rovnaké (rovnoramennosť). Vhodným spôsobom na vyjadrenie by teda mohli byť obsahy. Označme dĺžku ramien trojuholníka ABC ako a. Potom $|A_1X| = 2S_{ACX}/a$ a $|B_1X| = 2S_{BCX}/a$. Teraz môžeme súčet zo zadania prepísať ako $2(S_{ACX} + S_{BCX})/a$. Avšak $S_{ABC} = S_{ACX} + S_{BCX}$, teda platí, že $|A_1X| + |B_1X| = 2S_{ABC}/a$. Keďže obsah trojuholníka ABC a dĺžka ramena a sú vopred dané a nezávisia od voľby bodu X, úloha je vyriešená. Môžete si všimnúť, že tento výraz je v skutočnosti veľkosť výšky trojuholníka ABC na stranu AC, resp. BC, čo je aj hodnota nášho výrazu, ak bod X posunieme do A, alebo do B.

Druhé riešenie: Označme si päty kolmíc z bodu X na ramená AC a BC postupne A_1 a B_1. Veďme bodom A rovnobežku s XB_1. Jej priesečník so stranou BC označíme Q. Veďme ďalej bodom X rovnobežku so stranou BC a jej priesečník s priamkou AQ označíme P. Keďže $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA|$ (rovnoramennosť) a $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle PXA|$ (súhlasné uhly), zrejme platí $|\sphericalangle A_1AX| = |\sphericalangle PXA|$. Potom sú trojuholníky AA_1X a XPA zhodné podľa (sus) a platí $|A_1X| = |AP|$. Keďže $PX \parallel QB_1$ a $PQ \parallel XB_1$, $QPXB_1$ je obdĺžnik a platí $|XB_1| = |PQ|$. Spojením týchto dvoch rovností dostávame $|A_1X| + |B_1X| = |AP| + |PQ| = |AQ|$. Keďže AQ je výškou v trojuholníku ABC a jej veľkosť nezávisí od voľby bodu X, úloha je vyriešená.

Tretie riešenie: Zobrazme trojuholník ABC v osovej súmernosti podľa strany AB. Vidíme, že $|A_1X| + |B_1X| = |A_1X| + |B_1'X|$. Stačí len ukázať, že body A_1, X a B_1' ležia na priamke a potom sa náš výraz dá vyjadriť ako dĺžka výšky v rovnobežníku $ACBC'$. Skúste si to sami.

Komentár: Úloha bola pomerne jednoduchá, o čom svedčí aj veľký počet deväťbodových riešení. Body sme strhávali, ak ste v druhom type riešení neukázali, že príslušné tri body ležia na priamke, alebo ak ste vyhlásili za zrejmé niečo, k čomu bolo treba napísať ešte zopár rovníc. Čítajte vzorové riešenia a naučte sa rozlišovať, čo do riešenia písať treba a čo nie.

3. Štvorec 100×100 je rozdelený na 10 000 jednotkových štvorčekov. Do nich sú ľubovoľným spôsobom vpísané čísla 1 až 10 000 (v každom štvorčeku práve jedno číslo). Dokážte, že existujú dva susedné štvorčeky, do ktorých sú vpísané čísla líšiace sa aspoň o 51. Štvorčeky považujte za susedné, ak majú spoločnú stranu.

Opravovali: Laco Bačo a Peťo Milošovič **Počet riešiteľov: 39**

Riešenie:

Tvrdenie zo zadania dokážeme sporom. Predpokláme teda, že pre každé dva susedné štvorčeky platí, že rozdiel čísel do nich vpísaných je nanajvýš 50. Pozrime sa na ľubovoľné dva štvorčeky. Aký môže byť maximálny rozdiel čísel do nich vpísaných? Aby sme to zistili, musíme prejsť od jedného štvorčeku cez strany k druhému najkratšou možnou cestou a pritom rátať, cez koľko strán sme prešli. Všeobecne, ak dva štvorčeky od seba delí m štvorčekov v smere vodorovnom a n v smere zvislom, rozdiel čísel do nich vpísaných môže byť maximálne $50(m-1+n-1)$. Najďalej sa vieme dostať z rohového políčka a to do políčka v protiľahlom rohu. Pre náš konkrétny štvorec 100×100 bude rozdiel dvoch štvorčekov maximálne $50 \cdot 198 = 9900$. To je však menej ako niekoľko rozdielov dvojíc, ktoré by sme chceli vpísať. Napríklad čísla 1 a 10000 by sa nemohli nachádzať v štvorci súčasne, čím dostávame spor so zadaním. Preto neplatí náš predpoklad o maximálnom rozdiele 50 a platí to, čo sme mali podľa zadania dokázať.

Komentár: Úlohu ste väčšinou vyriešili správne, aj keď občas ste zabudli napísať niečo dôležité. Napríklad to, že ste úlohu riešili sporom a aj ste ho pri riešení našli ;-) Viacerí ste hneď prehlásili, že čísla 1 a 10000 musia byť v protiľahlých rohoch, ale nenapísali ste dôvod. Prípadne ste sa pokúšali prehlásiť o nejakom spôsobe vpísania čísel, že je ten najlepší, no v skutočnosti nebol. Pokiaľ sa úlohu rozhodnete riešiť práve takýmto postupom, poriadne si premyslite, prečo je práve váš spôsob najlepší možný a či náhodou neexistuje jednoduchý protipríklad.

4. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ sú na strane BC dané body E a F tak, že bod E je bližšie k bodu B ako bod F. Navyše platí

$$|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle CDF| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle FDE|.$$

Dokážte, že uhly FAC a EDB majú rovnakú veľkosť.

Opravovali: Janka Baranová a Denisa Múthová **Počet riešiteľov: 32**

Riešenie:

V geometrickej úlohe je na začiatku dobré nakresliť si (pokojne aj narysovať) veľký obrázok a pomenovať si uhly, body, …, čo najjednoduchšie a najprehľadnejšie. Teraz si zhrnieme, čo všetko vieme zo zadania a zakreslíme to do obrázka – $ABCD$ je konvexný štvoruholník (teda taký, ktorého všetky vnútorné uhly sú menšie než $180°$), $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle CDF| = \alpha$ (označme alfa) a $|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle FDE| = \beta$ (označme beta). Na základe týchto informácií chceme dokázať, že $|\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle FAC|$.

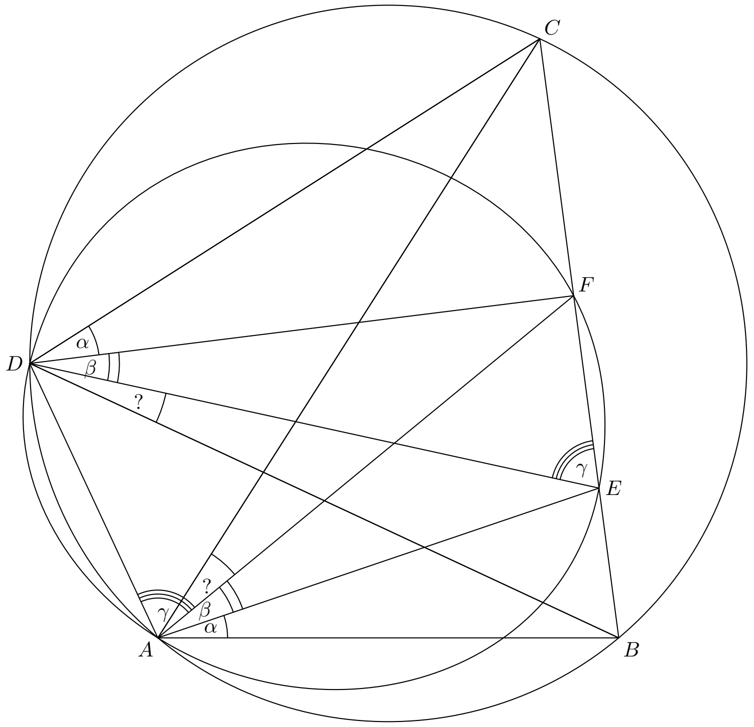
Ako prvé sa pokúsime využiť, že $|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle FDE| = \beta$ (tieto dva uhly sú nám podozrivé preto, že majú „spoločnú stranu"). Uhlom, o ktorých vieme, že sú zhodné a vidíme pod nimi tú istú úsečku, hovoríme obvodové[1] – potom body A, D, F a E ležia na kružnici.

Potiaľto boli všetky správne riešenia rovnaké, odtiaľ to už šlo dvoma spôsobmi:

Prvý spôsob: Keďže body A, D, F a E ležia na kružnici, tak môžeme využiť aj iné obvodové uhly (nad inou tetivou). Označme ešte uhol $|\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle DEF| = \gamma$ (keďže sú to obvodové uhly nad tetivou DF). Pozrime na trojuholník DEF a dopočítajme posledný uhol (keďže súčet uhlov v trojuholníku je $180°$) – $|\sphericalangle EFD| = 180° - \beta - \gamma$ a dorátame do priameho uhla $|\sphericalangle DFC| = \beta + \gamma$.

[1] A čo je to obvodový uhol? Majme danú tetivu AB na kružnici $k(S, r)$ a ľubovoľné body X_1, X_2 na kružnici k také, ktoré ležia v tej istej polrovine vzhľadom na priamku AB a sú rôzne od bodov A a B. Potom uhly AX_1B a AX_2B sa nazývajú obvodové a platí $|\sphericalangle AX_1B| = |\sphericalangle AX_2B|$. Navyše platí aj opačný smer, t.j. ak X_1, X_2 sú dva body z rovnakej polroviny (vzhľadom k AB) a $|\sphericalangle AX_1B| = |\sphericalangle AX_2B|$, tak body A, X_1, X_2, B ležia na kružnici.

Na záver vypočítame $|\sphericalangle DCF| = 180° - \alpha - \beta - \gamma$ (opäť z toho, že súčet uhlov v trojuholníku DCF je 180°).
Teraz, keď sa pozrieme na veľkosti uhlov DAB a DCB (je to uhol zhodný s DCF), tak si všimneme, že ich súčet je 180°. Čo teda vieme povedať o štvoruholníku $ABCD$? Je tetivový (každý štvoruholník, ktorého súčet protiľahlých uhlov je 180° je tetivový, čo znamená, že sa mu dá opísať kružnica). A teda BC je tetiva, nad ktorou sa nachádzajú dva zhodné obvodové uhly, a to $\sphericalangle BDC$ a $\sphericalangle BAC$. Oba tieto uhly sa „skladajú“ z troch uhlov – α, β a $\sphericalangle BDE$, resp. $\sphericalangle FAC$, čo znamená, že keďže $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BAC|$, tak aj $|\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle FAC|$.



Druhý spôsob: Keďže body A, D, F a E ležia na kružnici, tak $ADFE$ je tetivový, čo znamená, že súčet protiľahlých uhlov je 180°, teda $|\sphericalangle ADF| + |\sphericalangle AEF| = 180°$. Potom $|\sphericalangle AEB| = 180° - |\sphericalangle AEF| = 180° - (180° - |\sphericalangle ADF|) = |\sphericalangle ADF|$ (z toho, že body B, E a F ležia na priamke). Nakoniec vyjadríme protiľahlé vnútorné uhly štvoruholníka $ABCD$. $|\sphericalangle ABC| = 180° - |\sphericalangle AEB| - \alpha$ (z trojuholníka ABE) a $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ADF| + \alpha$. Vidíme, že ich súčet je 180° (keďže $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADF|$), čo znamená, že je tetivový. Teda BC je tetiva, nad ktorou sa nachádzajú dva zhodné obvodové uhly $\sphericalangle BDC$ a $\sphericalangle BAC$. Oba tieto uhly sa „skladajú“ z troch uhlov – α, β a $\sphericalangle BDE$, resp. $\sphericalangle FAC$, čo znamená, že keď $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BAC|$, tak aj $|\sphericalangle BDE| = |\sphericalangle FAC|$.

Komentár: Veľa z vás prišlo na správne riešenie, no občas ste ho zabudli dôkladne vysvetliť – napr. prečo je štvoruholník $AEFD$ tetivový, alebo prečo sú to obvodové uhly. Preto sme museli rozlíšiť úplne dokonalé riešenia od tých, ktorým niečo chýbalo. Do budúcna vám chceme poradiť, aby ste si riešenie po napísaní ešte raz prečítali a zbavili sa zbytočných preklepov, pretože v geometrii výmena bodov, uhlov a podobne úplne mení význam celého riešenia. Skúste viac komentovať kroky, ktoré robíte, aby ste zbytočne neprišli o jeden, či dva body, aj keď vaše riešenie je správne. a tiež poučenie pre tých, ktorí úlohu dobre nevyriešili – väčšina z vás mala v obrázku veľa uhlov, ktoré ste možno aj mysleli dobre, no nemohli sme za ne dať body, keďže nevieme, ako ste to mysleli a ako ste na to prišli. Preto nabudúce aj keď neprídete na celé riešenie, tak píšte kroky, ktoré ste urobili, aby ste mohli dostať nejaké body. Veľa šťastia!

5. V rovine stojí $2n + 1$ tankov, kde $n \in \mathbb{N}$, pričom žiadne dva tanky nie sú rovnako vzdialené. Naraz každý tank vystrelí na k nemu najbližší tank (nie však na seba). Dokážte, že
a) aspoň jeden tank nedostal žiaden zásah;
b) dráhy žiadnych dvoch striel sa nekrižovali;
c) žiadny tank nezasiahlo viac ako 5 striel.

Opravovali: Matúš Stehlík a Edo Eiben **Počet riešiteľov: 45**

Riešenie:

a) Dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na n.

1. Pre $n = 1$ máme 3 tanky. Tie dva z nich, ktoré sú k sebe najbližšie sa zasiahnu navzájom (určite také sú lebo vzdialenosti sú rôzne), takže zvyšný tank už nemôže dostať zásah.

2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $n = k$ (ak máme $2k + 1$ tankov, medzi ktorými sú rôzne vzdialenosti, tak ostane aspoň jeden nezasiahnutý), chceme ukázať, že potom platí aj pre $n = k+1$ (z $2k+3$ tankov s rôznymi vzdialenosťami zostane aspoň jeden nezasiahnutý). Keďže tankov je konečne veľa a žiadne dva z nich nie sú rovnako vzdialené, vieme nájsť dva tanky, ktorých vzdialenosť je najmenšia. Potom tieto dva tanky vystrelia na seba navzájom. Ak do niektorého z nich strelil ešte iný tank tvrdenie platí, lebo máme rovnako veľa tankov ako výstrelov, teda ak je niektorý tank zasiahnutý viac ako raz, musí iný tank ostať nezasiahnutý. Ak nie, potom môžeme tieto dva tanky odobrať, zostane teda $2k + 1$ (o dva menej ako $2k + 3$) tankov, ktoré strieľajú len medzi sebou a majú rôzne vzdialenosti, takže podľa indukčného predpokladu aspoň jeden z nich nedostane zásah.

Iné riešenie: Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladáme, že každý tank dostane práve jeden zásah (ak by dostal menej, tak tvrdenie platí, ak by dostal viac, tak tiež, lebo nejaký iný tank musí ostať nezasiahnutý, pretože výstrelov a tankov je rovnako veľa).
Označme si tanky $t_1, t_2, \ldots, t_{2n}, t_{2n+1}$ tak, že t_1 vystrelí na t_2, ten vystrelí na t_3, až nejaký tank t_k $(1 < k \leq 2n + 1)$ vystrelí na t_1 (musí taký byť, lebo t_1 dostane zásah). Potom budeme hovoriť, že tanky $t_1, t_2, \ldots, t_k$ tvoria cyklus dĺžky k (dĺžka cyklu označuje počet tankov v danom cykle).
Ukážeme sporom, že ak platí tvrdenie zo zadania, potom tam nemôže byť cyklus dĺžky väčšej ako 2. Nech tam je cyklus dĺžky k, $(2 < k \leq 2n + 1)$. Označme v ňom tanky zaradom, ako po sebe strieľali $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Vzdialenosť tankov t_1 a t_2 budeme označovať $|t_1t_2|$. Potom musí platiť

$$|t_1t_2| > |t_2t_3| > \cdots > |t_{k-1}t_k| > |t_kt_1|,$$

teda $|t_1t_2| > |t_kt_1|$, čo znamená, že t_1 vystrelí na t_k miesto t_2, teda t_2 v tomto cykle zostane nezasiahnutý, čo je spor s tým, že je to cyklus a teda spor s tým, že všetky tanky budú zasiahnuté (túto úvahu sme mohli spraviť aj elegantnejšie, lebo niektoré dva tanky v tomto cykle budú mať medzi sebou najkratšiu vzdialenosť a tie sa trafia navzájom, takže nepatria do daného cyklu, alebo je to cyklus dĺžky 2, čo je spor).
Streľbou sa tanky rozdelia do jednotlivých cyklov. Ukážeme, že medzi nimi bude cyklus dĺžky aspoň tri. Zrejme každý tank je iba v jednom cykle, lebo každý vystrelí len raz. Potom súčet dĺžok všetkých cyklov je rovný počtu tankov. Keďže je to nepárne číslo, aspoň jeden cyklus musí byť nepárnej dĺžky, ale každý cyklus má dĺžku aspoň 2, lebo tank nemôže vystreliť sám na seba. Teda tam bude cyklus dĺžky aspoň 3.
Keďže sme dokázali, že ak by tvrdenie neplatilo, tak by tam bol cyklus dĺžky aspoň 3, ale zároveň sme ukázali, že takýto cyklus nemôže vzniknúť. Preto aspoň jeden tank nedostal žiaden zásah.

b) Dokážeme sporom, predpokladajme, že nejaké strely sa križujú. Označme si tieto tanky tak, že strela tanku A na tank C sa križuje so strelou tanku B na tank D. Označme X bod, v ktorom sa pretnú. Keďže tanky strieľajú vždy na najbližší musí platiť $|AC| < |AD|$ a $|BD| < |BC|$ sčítaním týchto dvoch nerovností dostávame

$$|AC| + |BD| < |AD| + |BC|.$$

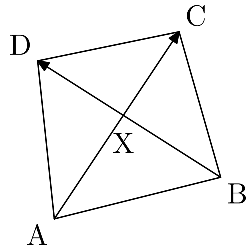
Z trojuholníkových nerovností pre trojuholník BXC resp. AXD máme $|BX| + |XC| > |BC|$ resp. $|AX| + |XD| > |AD|$. Ich sčítaním dostávame

$$|BX| + |XC| + |AX| + |XD| > |BC| + |AD|$$

$$(|AX| + |XC|) + (|BX| + |XD|) > |BC| + |AD|$$

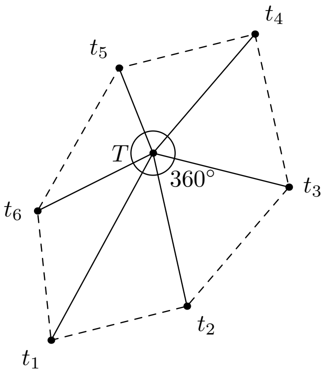
$$|AC| + |BD| > |BC| + |AD|.$$

Čo je presne opačná nerovnosť k tej, ktorá musí platiť, aby tank A strieľal na C a B na D (dokázaná vyššie). Preto dostávame spor, takže žiadne dve strely sa nemôžu križovať.



Iné riešenie: Dokážeme sporom, predpokladajme, že nejaké strely sa križujú. Označme si tieto tanky tak, že strela tanku A na tank C sa križuje so strelou tanku B na tank D. Využijeme, že v trojuholníku je oproti najväčšiemu uhlu najdlhšia strana. v štvoruholníku $ABCD$ je aspoň jeden vnútorný uhol väčší alebo rovný 90°. Nezáleží nám na smere strely, tak si môžeme povedať, že je to $\sphericalangle ABC$ (ak by sme si zvolili iný, môžeme zmeniť označenie tak, aby sa volal ABC a ďalej to doriešime rovnako), je potom najväčší v trojuholníku ABC, takže je oproti nemu aj najdlhšia strana AC. Lenže potom a nestrieľa na najbližší tank, lebo $|AC| > |AB|$, čo je spor.

c) Dokážeme sporom, predpokladajme, že nejaký tank T zasiahlo aspoň 6 striel. Zoberme teraz z týchto tankov, ktoré ho zasiahli, ľubovoľných 6. Označme tieto tanky nasledovne: tank T sa otočí na mieste o 360° a počas toho priradí tankom, ktoré do neho strelili, zaradom, ako ich uvidí, označenia $t_1, t_2, \ldots, t_6$. Tieto tanky budú tvoriť 6-uholník (žiadne tri z nich nemôžu ležať na priamke, lebo ten medzi by bol potom trafený).



Potom v každom trojuholníku tvorenom dvoma tankami strieľajúcimi do T a tankom T (budú to trojuholníky t_iTt_j, pre všetky i, j, kde $1 \leq i < j \leq 6$) bude najdlhšia strana $|t_it_j|$ (inak by jeden z tankov t_i, t_j bol bližšie k druhému ako k T, takže by nestrieľal na T). Keďže v trojuholníku je najdlhšia strana oproti najväčšiemu uhlu, tak uhol t_iTt_j musí byť v danom trojuholníku t_iTt_j najväčší, teda väčší ako 60°. Nemôžu byť menšie alebo rovné ako 60°, lebo jeden zo zvyšných uhlov by bol od nich väčší alebo by sa všetky rovnali 60° a bol by to rovnostranný trojuholník, čo nemôže nastať, pretože vzdialenosti sú rôzne. Potom

$$360° = |\sphericalangle t_1Tt_2| + |\sphericalangle t_2Tt_3| + |\sphericalangle t_3Tt_4| + |\sphericalangle t_4Tt_5| + |\sphericalangle t_5Tt_6| + |\sphericalangle t_6Tt_1| > 6 \cdot 60° = 360°.$$

Prvú rovnosť máme z toho, že keď otočíme tank T o 360°, tak jeho otočenie vieme rozdeliť na tieto časti. Nerovnosť z toho, že sme dokázali, že každý z tých čiastkových uhlov je väčší ako 60°. Dostali sme 360° > 360°, čo zrejme neplatí, takže máme vytúžený spor. Platí, že žiadny tank nezasiahlo viac ako 5 striel.

Komentár: Všetky tri časti úlohy boli približne rovnako náročné a viacerým z vás sa podarilo s niektorou z nich popasovať. V časti **b)** sa vo veľa riešeniach objavilo tvrdenie "v konvexnom štvoruholníku musí byť aspoň jedna uhlopriečka dlhšia ako strana", ktoré je síce pravdivé, ale v riešení, ktoré ho používa sme očakávali aj jeho dôkaz, keďže toto tvrdenie je len preformulovaním toho, čo bolo treba dokázať (strely sa nemôžu krížiť, čiže ak sú tanky vrcholy štvoruholníka, tak nemôžu streliť po oboch uhlopriečkach, teda aspoň jedna z nich musí byť dlhšia ako strana). Na záver ešte čerešnička pre tých, ktorým sa úloha zdala jednoduchá: je možné, aby každý tank zasiahlo presne 5 striel, alebo tam musí byť tank zasiahnutý najviac štyrikrát?

6. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q také, že $4^p + 1 = 5q$.

Opravovali: Tomáš Babej a Marek Derňár **Počet riešiteľov: 26**

Riešenie:

Pozrime sa lepšie na pravú stranu rovnice. Keďže q je prvočíslo, výraz na druhej strane je súčin dvoch prvočísel. Ak by sa nám aj ľavú stranu rovnice podarilo upraviť na súčin dvoch celých čísel, k riešeniu by sme nemali až tak ďaleko, stačilo by nám rozobrať už len konečný počet možností, ako napísať $5q$ ako súčin dvoch celých čísel. Skúsme sa teda vybrať týmto smerom.
Upravme si zadanie na tvar $\left(2^p\right)^2 + 1 = 5q$. Na ľavej strane máme súčet dvoch štvorcov, doplňme ich teda na úplný štvorec

$$\left(\left(2^p\right)^2 + 2 \cdot 2^p + 1\right) - 2 \cdot 2^p = 5q$$
$$\left(2^p + 1\right)^2 - 2 \cdot 2^p = 5q$$
$$\left(2^p + 1\right)^2 - 2^{p+1} = 5q.$$

Ako ďalej? Ak by sme vedeli, že $(p+1)$ je párne číslo, mali by sme na ľavej strane rozdiel dvoch štvorcov, čo vieme ľahko upraviť na súčin dvoch celých čísel pomocou známej identity $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Výraz $(p+1)$ je nepárny, len ak je p párne. No p je zo zadania prvočíslo, a jediné párne prvočíslo je 2. Rozoberme prípad $p = 2$ teda osobitne. Pre $p = 2$ dostávame teda $5q = 17$, čo je spor s tým, že q je prvočíslo. Pre $p = 2$ teda riešenie neexistuje a my môžeme smelo predpokladať, že $p \geq 3$, a teda nepárne. Rovnica $\left(2^p + 1\right)^2 - 2^{p+1} = 5q$ má na ľavej strane rozdiel dvoch štvorcov a my ju môžeme upraviť na tvar

$$\left(2^p + 1 + 2^{\frac{p+1}{2}}\right)\left(2^p + 1 - 2^{\frac{p+1}{2}}\right) = 5q.$$

Existujú práve 4 možnosti, ako napísať $5q$ ako súčin dvoch prirodzených čísel

$$5q = (1) \cdot (5q) = (5q) \cdot (1) = (5) \cdot (q) = (q) \cdot (5).$$

Keďže $p \geq 3$, vieme odhadnúť výraz $\left(2^p + 1 - 2^{\frac{p+1}{2}}\right)$ nasledovne: $p = 2t+1$, kde $t \geq 1$, z čoho vyplýva $2^p - 2^{\frac{p+1}{2}} + 1 = 2^{2t+1} - 2^{t+1} + 1 = 2^{t+1}\left(2^t - 1\right) + 1 \geq 2^2 + 1 = 5$.
Výraz $\left(2^p + 1 - 2^{\frac{p+1}{2}}\right)$ sme teda upravili na tvar $2^{t+1}\left(2^t - 1\right) + 1$, z ktorého je zrejmé, že pre rastúce t (a teda aj p) hodnota výrazu rastie a už nenadobúda hodnotu 5 pre $p > 3$.
Z nerovnosti $\left(2^p + 1 + 2^{\frac{p+1}{2}}\right) > \left(2^p + 1 - 2^{\frac{p+1}{2}}\right)$ vyplýva, že $\left(2^p + 1 - 2^{\frac{p+1}{2}}\right) \geq 5$ a $\left(2^p + 1 + 2^{\frac{p+1}{2}}\right) > 5$, čomu vyhovuje len možnosť $\left(2^p + 1 - 2^{\frac{p+1}{2}}\right) = 5$ a zároveň $\left(2^p + 1 + 2^{\frac{p+1}{2}}\right) = q$, kde $q > 5$. ako sme už ukázali, hodnota výrazu $\left(2^p + 1 - 2^{\frac{p+1}{2}}\right)$ so stúpajúcim p rastie, a teda v prvej rovnici nastáva rovnosť práve vtedy a len vtedy, keď $p = 3$. Stačí už len overiť, či pre $p = 3$ bude q prvočíslo. Z druhej rovnice máme $q = \left(2^p + 1 + 2^{\frac{p+1}{2}}\right) = \left(2^3 + 1 + 2^{\frac{3+1}{2}}\right) = 8 + 4 + 1 = 13$. Zadaniu teda vyhovuje jediná dvojica $[p; q] = [3; 13]$.

Komentár: Úloha napriek tomu, že bola nasadená ako 6., nevyžadovala pokročilé znalosti z teórie čísel a určite mnohí z vás, ktorí ste ju zo strachu neriešili, to teraz ľutujete. Riešitelia by sa dali rozdeliť na dve skupiny - na tých, ktorí sa (občas až na pár potknutí) dostali úspešne do cieľa a na tých, ktorí na ceste zablúdili, no nebáli sa to (väčšinou) statočne priznať. Aj tí však mali občas pozorovania, ktoré viedli k riešeniu a boli im za ne udelené body. Tak sa nabudúce nebojte poslať aj čiastočné riešenie, možno pochodíte rovnako.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **21. 11. 2011**

1. Nájdite všetky prvočísla, ktoré sú súčasne súčtom aj rozdielom dvoch vhodných prvočísel.

2. Dokážte, že v ľubovoľnom desaťcifernom čísle sa dajú cifry premiestniť takým spôsobom, aby súčet prvých päť cifier nového čísla sa líšil od súčtu jeho posledných päť cifier o menej než desať. (Úlohu riešte v desiatkovej sústave.)

3. Nech n je prirodzené číslo. Dokážte, že čísla $n! + 1$ a $(n+1)! + 1$ sú nesúdeliteľné.
Zápis $n!$ označuje súčin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

4. Do políčok tabuľky 2011×2011 sú vpísané reálne čísla v absolútnej hodnote neprevyšujúce 1 tak, že v každom políčku je práve jedno číslo. Súčet štyroch čísel v ľubovoľnom štvorci 2×2 je 0. Dokážte, že súčet všetkých čísel v tabuľke je nanajvýš 2011.

5. Rozhodnite, či existuje konvexný päťuholník, v ktorom žiadna uhlopriečka nie je väčšia ako *protiľahlá strana*, t. j. strana, ktorá s touto uhlopriečkou nemá žiadny spoločný bod. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

6. Daný je trojuholník ABC. Pre bod P ležiaci vnútri trojuholníka ABC označíme D, E, F päty kolmíc spustených z P na priamky BC, CA, AB (v tomto poradí). Nájdite všetky polohy bodu P, pre ktoré výraz

$$\frac{|BC|}{|PD|} + \frac{|CA|}{|PE|} + \frac{|AB|}{|PF|}$$

nadobúda minimálnu hodnotu.

Poradie po 1. sérii Zimého semestra 36. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Patrik Bak	1. A	GNáleSO	9	9	9	9	7	9	1	54
	Martin Vodička	Septima	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	0	54
3.	Katarína Krajčiová	Kvinta	GAlejKE	9	9	9	9	8	-	0	53
4.	Ľudmila Šimková	Sexta	GPároNR	9	8	9	9	9	-	1	52
	Miroslav Stankovič	2. A	GPoštKE	9	9	9	8	9	-	0	52
6.	Ján Jursa	2. A	GPoštKE	8	7	9	9	-	8	0	48
	Klára Ficková	4. A	GPoštKE	9	9	9	9	9	3	0	48
8.	Matúš Hlaváčik	Septima	GAlejKE	9	9	8	9	9	2	0	46
9.	Alexander Ténai	1. A	GPoštKE	9	9	9	-	6	2	0	44
10.	Michal Kopf	4. A	GSlezCZ	9	9	9	9	7	-	0	43
	Marek Galajda	3. A	GZbroKE	9	9	7	9	-	9	1	43
	Štěpán Šimsa	Septima	GJJLit	9	9	9	7	9	-	0	43
13.	Viktor Lukáček	4. C	GŠevčPO	8	9	9	9	7	-	-1	42
	František Lami	3. A	GPoštKE	9	9	8	8	8	-	0	42
15.	Pavol Koprda	Oktáva A	GHvieTT	9	9	9	9	1	-	0	37
16.	Samuel Súčik	1.	GNovoBA	9	9	9	-	-	-	0	36
	Martin Rapavý	Sexta A	GAlejKE	9	9	9	9	-	-	0	36
	Richard Trembecký	Septima	GAlejKE	9	9	9	9	-	-	0	36
19.	Marko Puza	2. A	GPoštKE	9	9	9	3	2	-	0	34
	Anton Gromóczki	1. A	GPoštKE	7	9	9	-	-	-	0	34
	Filip Hanzely	Septima	GKomeSB	8	9	8	-	9	-	0	34
22.	Dorota Jarošová	Kvinta	GAlejKE	9	5	7	-	3	-	0	33
23.	Barbora Marečáková	Oktáva	GKukuPP	6	9	9	8	-	-	0	32
	Jozef Janovec	Kvinta	GAlejKE	9	7	-	-	5	2	0	32
25.	Irena Bačinská	Sexta	GKomeLY	9	5	8	-	5	2	0	31
	Lucia Magurová	3. A	GPoštKE	9	9	-	9	4	-	0	31
27.	Kristína Faguľová	4. A	GPoštKE	-	7	6	3	6	8	0	30
	Miloslav Homer	4. A	GPoštKE	2	9	3	7	9	-	0	30

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
29.	Patrícia Lakatošová	1. B	GZbroKE	9	5	-	-	6	-	0	29
30.	Daniel Till	4. A	GPoštKE	3	9	8	-	4	3	0	27
	Mojmír Stehlík	Septima B	GTr12KE	6	9	8	-	4	-	0	27
	Florián Hatala	1. A	GPoštKE	7	8	-	-	3	1	0	27
	Samuel Kočiščák	1. A	GPoštKE	1	8	7	-	3	-	0	27
34.	Tomáš Kello	3. E	GMudrPO	1	9	9	1	4	2	0	26
35.	Peter Kovács	Kvinta	GAlejKE	9	1	-	-	3	2	0	24
36.	Vladimír Macko	3. A	GHronZV	6	7	-	-	9	-	0	22
	Martina Oravcová	2. A	GPoštKE	9	5	-	3	3	1	0	22
	Dávid Lupták	3. F	GTajoBB	9	9	-	2	-	2	0	22
39.	Roman Pivovarník	Sexta A	GMudrPO	9	9	-	-	3	-	0	21
	Šimon Midlik	2. C	GMudrPO	-	6	9	-	6	-	0	21
41.	Vladislav Vancák	Sexta B	GAlejKE	-	9	9	-	2	-	0	20
42.	Ján Pavlenda	Kvinta	GČachBA	1	6	2	2	1	2	0	19
	Veronika Koľveková	4. A	GPoštKE	9	5	-	-	3	2	0	19
44.	Viktória Valachová	2. A	GŠkolSN	9	9	-	-	-	-	0	18
45.	Ján Dudič	3. A	GPoštKE	1	8	-	7	1	-	0	17
	Dávid Kancián	Septima	GAlejKE	8	9	-	-	-	-	0	17
47.	Jozef Lelič	4. A	GPoštKE	-	7	-	8	1	-	0	16
	Barbora Murinová	2. A	GPoštKE	1	5	4	-	6	-	0	16
	Jaroslav Hofierka	2. B	GMudrPO	-	9	-	-	-	7	0	16
	Jakub Dargaj	2. A	GPoštKE	-	9	1	2	1	2	0	16
51.	Ivana Gašková	Oktáva	GAlejKE	-	9	-	-	3	1	0	13
52.	Ela Bardiovská	Septima B	ZTeplBA	-	9	1	-	1	-	0	11
	Tomáš Macko	3. A	GPoštKE	1	-	8	-	2	-	0	11
	Mark Daniel	2. B	GPároNR	-	9	-	-	-	2	0	11
55.	Karolína Šromeková	2. C	GTataPP	0	9	-	-	1	-	0	10
	Ján Kurimský	9. A	CZSolPO	-	3	1	1	-	2	0	10
57.	Peter Hojnoš	2. E	GŠkolSN	1	4	-	1	1	1	0	9
58.	Katarína Tobiášová	1. A	GMaláMT	1	2	-	1	1	1	0	8
59.	Ľuboš Krnáč	Kvinta	GŠkolVK	-	0	0	0	-	1	0	2
60.	Daniel Demeter	Kvinta	GŠkolVK	-	-	-	-	-	-	0	0
	Peter Drexler	Kvinta	GŠkolVK	-	-	-	-	-	-	0	0
	Tomáš Vrško	Kvinta	GŠkolVK	-	-	-	-	-	-	0	0
	Dávid Stredanský	Kvinta	GŠkolVK	-	-	-	-	-	-	0	0

Pohár konštruktérov Zimého semestra 36. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	20	591
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	11	364
3.	GMudrPO	Gymnázium J. A. Raymana Mudroňova 20 080 01 Prešov	4	84
4.	GZbroKE	Gymnáz. sv.T.Akvinského Zbrojničná 3 040 01 Košice	2	72
5.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	2	63
6.	GNáleSO	Gymnázium kpt. Nálepku 6 073 01 Sobrance	1	54
7.	GSlezCZ	Slezské Gymnázium Zámecký okruh 29 746 01 Opava	1	43
7.	GJJLit	Gymnázium Josefa Jungmanna Svojsíkova 1 412 65 Litoměřice	1	43
9.	GŠevčPO	Gymnázium sv. Moniky Tarasa Ševčenka 1 080 01 Prešov	1	42
10.	GHvieTT	Gymnázium Angely Merici Hviezdoslavova 10 917 01 Trnava	1	37
11.	GNovoBA	Gymnázium J. Hronca Novohradská 1 821 09 Bratislava 2	1	36
12.	GKomeSB	Gymnázium Komenského 40 083 01 Sabinov	1	34
13.	GKukuPP	Gymnázium Kukučínova 058 39 Poprad	1	32
14.	GKomeLY	Gymnázium Komenského 13 082 71 Lipany	1	31
15.	GTr12KE	Gymnázium Trebišovská 12 040 11 Košice	1	27
15.	GŠkolSN	Gymnázium Školská 7 052 01 Spišská Nová Ves	2	27
17.	GTajoBB	Gymnázium J. G. Tajovského 25 974 01 Banská Bystrica	1	22
17.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	22
19.	GČachBA	Gymnázium škol. bratov Čachtická 14 831 06 Bratislava 35	1	19
20.	ZTeplBA	Škola pre mim. nad.deti Teplická 7 831 02 Bratislava 3	1	11
21.	CZSolPO	Cirkevná základná škola Solivarská 49 080 05 Prešov	1	10
21.	GTataPP	Gymnázium Dominika Tatarku 14 058 19 Poprad	1	10
23.	GMaláMT	Gymnázium V.Paulinyho - T Malá hora 3 036 01 Martin	1	8
24.	GŠkolVK	Gymnázium Školská 21 990 01 Veľký Krtíš	5	2

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2011 • Zimný semester 36. ročníka (2011/2012)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`