STROM

Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte Stromáci,

Prázdniny už zvedavo vykukávajú spoza rohu a netrpezlivo čakajú, ako s nimi naložíte. No ešte chvíľu budú musieť za tým rohom ostať. Aj tak by ste sa im nemohli plnohodnotne venovať. Každú chvíľu by ste sa pristihli pri tom, ako neprítomne hľadíte na všetky tie dary leta a myslíte len na jedinú otázku. Čo tam po vode a slnku, vy chcete vedieť, ako to celé vlastne dopadlo. Lebo prázdniny, tie sa raz skončia. A jediným ďalším únikom z krutej školskej reality sa stane jesenné sústredenie, na ktoré sa dostanú len najlepší. Aby ste si teda mohli letné dni vychutnať bez výčitiek z ich zanedbávania, prinášame vám nielen konečné poradie, ale aj správne riešenia príkladov druhej série. Ak vám to nevyšlo, tak nevešajte hlavu a o to bezhlavejšie sa vrhnite do víru kúpalísk, rodinných výletov a návštev u starých rodičov. Nech to leto stojí za to!

Vaši **STROM**isti

Riešenia 1. série úloh Letného semestra 36. ročníka

1. Daných je päť bodov P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 vo vnútri štvorca so stranou dĺžky 1. Dokážte, že aspoň jedna zo všetkých vzdialeností týchto bodov je menšia ako $\sqrt{2}/2$.

Opravovali: Robčo Tóth a Ivka Gašková **Počet riešiteľov: 34**

Riešenie:

Zamyslime sa najprv nad otázkou, akú najväčšiu vzdialenosť môžu mať dva body umiestnené niekde na kruhu. Po chvíľke uvažovania prídeme na to, že to budú body umiestnené na priemere tohto kruhu a maximálna vzdialenosť bude práve priemer. Dokážeme to pomocou trojuholníkovej nerovnosti. Zoberme si ľubovoľné dva body A a B umiestnené niekde v kruhu k so stredom S. Potom ich vzdialenosť je určite menšia, alebo rovná ako súčet $|AS| + |BS|$, ktorý je určite menší, alebo rovný ako dvojnásobok polomeru. Teda vzdialenosť bodov A a B je nanajvýš dvojnásobok polomeru a táto vzdialenosť sa nadobúda pre body na priemere kružnice. Ak sa teraz zamyslíme nad otázkou, akú najväčšiu vzdialenosť môžu mať dva body umiestnené niekde v štvorci (aj na jeho obvode), stačí nám tomuto štvorcu opísať kružnicu a vidíme, že odpoveďou je veľkosť uhlopriečky, lebo práve tá tvorí priemer opísanej kružnice (vďaka Tálesovej vete). Rozdeľme štvorec zo zadania na štyri menšie štvorce so stranou jedna polovica. Z Dirichletovho princípu nám vyplýva, že v aspoň jednom z nich budú aspoň dva body (tí z vás, ktorí nepoznajú Dirichletov princíp, porozmýšľajte trošku a hneď pochopíte, prečo je to tak). Maximálna vzdialenosť v tomto štvorci je veľkosť jeho uhlopriečky, ktorá je rovná $\sqrt{2}/2$, ale tá sa nadobúda len pre protiľahlé vrcholy štvorca, ktoré nikdy nebudú oba naraz vo vnútri veľkého švorca. Takto sme ukázali existenciu dvoch bodov, ktoré sú od seba vzdialené menej ako $\sqrt{2}/2$.

Komentár: Úlohu väčšina z vás hravo zvládla, ale len málokto z vás považoval za potrebné zdôvodniť, že maximálna vzdialenosť dvoch bodov v štvorci je veľkosť jeho uhlopriečky. Ako sa môžete presvedčiť z tohto vzorového riešenia, dôkaz samotný vôbec nie je zadarmo!

2. Pre ktoré n existuje n navzájom rôznych prirodzených čísel takých, že sa dajú usporiadať do kruhu tak, aby podiel každých dvoch susedných čísel (väčšie delené menším) bol prvočíslo? Nájdite všetky takéto n a ukážte, prečo iné nevyhovujú.

Opravovali: Peťo Milošovič a Monča Vaľková **Počet riešiteľov: 23**

Riešenie:

Najprv ukážeme, ako to ide pre všetky párne n. Mohli by sme čísla do kruhu dávať napríklad takto:

$$1, p_1, p_1 \cdot p_2, p_2, p_2 \cdot p_3, p_3, \dots, p_{(n/2)}.$$

Prvočísel je nekonečne veľa, takže takýto postup bude fungovať pre ľubovoľne veľké n.

Teraz dokážeme, že pre nepárne n sa to nikdy nedá. Časom budeme chcieť dospieť k sporu, tak teda predpokladajme, že nepárny počet čísel sa takto do kruhu dá rozmiestniť. Označme čísla v kruhu takto:

$$a_1, a_2, \dots, a_{(2k+1)}$$

Ak číslo a_1 má v prvočíselnom rozklade súčet exponentov pri jednotlivých prvočíslach rovný k, tak pre číslo a_2 musí byť takýto súčet rovný $k+1$ alebo $k-1$, aby ich podielom bolo prvočíslo. Medzi susednými číslami sa teda vždy zmení parita súčtu exponentov v prvočíselnom rozklade. Čísla a_1, a_3, a_5,. . . ,$a_{(2k+1)}$ majú rovnakú paritu súčtu. Na druhej strane čísla a_1 a $a_{(2k+1)}$ sú susedné a mali by mať rôznu paritu. Prichádzame k sporu, to znamená, že pre nepárne n sa to predsa len nedá.

Komentár:

3. Na tanečnom večierku boli chlapci a dievčatá. Každý chlapec tancoval s aspoň jedným dievčaťom, ale nie so všetkými. Každé dievča tancovalo s aspoň jedným chlapcom, ale nie so všetkými. Dokážte, že sa vždy dajú vybrať dvaja chlapci a dve dievčatá tak, že každý z vybratých chlapcov tancoval s práve jedným z vybratých dievčat a každé z vybratých dievčat tancovalo s práve jedným z vybratých chlapcov.

Opravovali: Matúš Stehlík a Paľo Lietadlo Koprda **Počet riešiteľov: 19**

Riešenie:

Vyberme chlapca, ktorý tancoval s najmenším počtom dievčat (t.j. každý iný chalan tancoval s aspoň toľkými dievčatami ako on) a označme ho A. Vieme, že chlapec A tancoval určite s aspoň jedným dievčaťom - vyberme také dievča a označme ho C. Určite existuje chlapec, ktorý s dievčaťom C netancoval, pretože nikto netancoval so všetkými – označme ho B. Chlapec B tancoval s aspoň toľkými dievčatami ako chlapec A, ale dievča C tancovalo s A a s B nie, preto chlapec B tancoval s aspoň jedným dievčaťom takým, s ktorým A netancoval - označme ju D.
A máme vyhovujúcu štvoricu A, B, C, D (Overte si, že vyhovuje!). Takto vieme nájsť vytúženú štvoricu na každom večierku, ktorý spĺňa podmienky zo zadania, preto tvrdenie vždy platí.

Iné riešenie: (podľa Alexandra Ténaia) Označme D_{CH} množinu dievčat, ktoré tancovali s chlapcom CH. Rozoberieme dve možnosti.

- Ak existujú dvaja takí chlapci A, B, že D_A nie je podmnožinou D_B a zároveň D_B nie je podmnožinou D_A potom vieme z D_A vybrať dievča U, ktoré nepatrí do D_B a z D_B vieme vybrať dievča V, ktoré nepatrí do D_A. Štvorica A, B, U, V je potom presne tá, ktorú hľadáme.
- V opačnom prípade pre každú dvojicu chlapcov A, B platí $D_A \subseteq D_B$ alebo $D_A \supseteq D_B$ (ak platia obe, tak $D_A = D_B$). Preto vieme všetkých chlapcov označiť $CH_1, CH_2, \dots, CH_n$, kde n je počet chlapcov na večierku tak, aby platilo

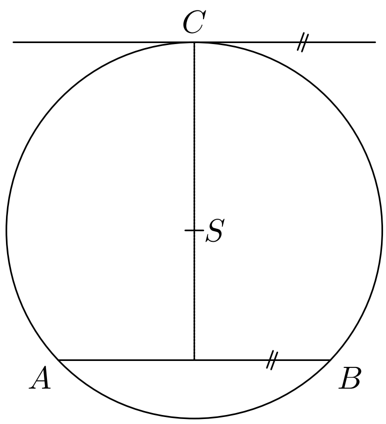
$$D_{CH_1} \subseteq D_{CH_2} \subseteq \dots \subseteq D_{CH_n}.$$

Lenže v D_{CH_n} nie sú všetky dievčatá, lebo chlapec CH_n netancoval so všetkými. Nech D je dievča, ktoré netancovalo s CH_n. Toto dievča netancovalo so žiadnym chlapcom, čo je spor so zadaním, preto táto možnosť nemohla nastať.

Komentár: Úloha nebola ťažká, mnohí z vás ju hravo zvládli. Štvorica sa dala nájsť pomerne ľahko, ak ste si vybrali správnych chlapcov. V prvom riešení sa dal vybrať miesto najmenej vytancovaného chlapca ten, ktorý tancoval s najviac dievčatami (skúste si to). Zaujímavé je však aj druhé riešenie, kde ukážeme existenciu tejto štvorice zdanlivo bez nejakej špeciálnej voľby jedného zo štvorice(a síce sme tam prešli všetky dvojice chlapcov). Naozaj? Spor nastal u chlapca, ktorý tancoval s najviac dievčatami (vedeli by ste nájsť spor u toho, ktorý tancoval s najmenej dievčatami? Pozrite sa na dievča, ktoré s ním tancovalo). Takže tak či tak sme potrebovali použiť jedného z týchto extrémistov :).

4. Daná je kružnica k a jej tetiva AB.
a) Nájdite na kružnici bod C taký, že obsah trojuholníka ABC je maximálny.
b) Nájdite na kružnici bod D taký, že obvod trojuholníka ABD je maximálny.
c) Nájdite trojuholník XYZ, ktorý je vpísaný do kružnice k a má najväčší možný obvod.

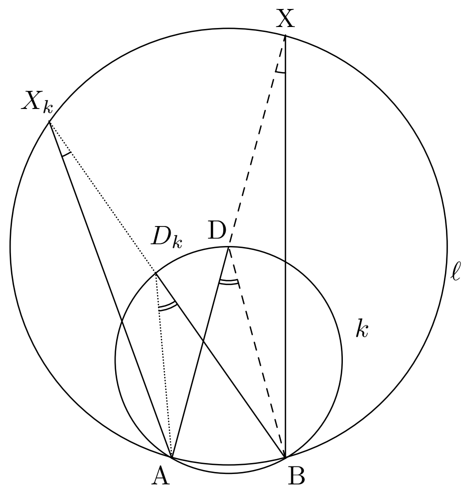
Opravovali: Janka Baranová **Počet riešiteľov: 28**
Riešenie:



a) Na začiatok tejto úlohy je dobré pripomenúť si vzorček pre obsah trojuholníka – počíta sa ako súčin strany a výšky na ňu predelený dvomi. Z tohto vyplýva, že ak stranu AB máme vopred danú (jej dĺžka sa teda nemení), tak obsah bude maximálny, ak výška bude maximálna. Už nám len stačí zistiť, ktorá výška je tá najdlhšia. Robíme teda rovnobežku s AB takú, aby vzdialenosť týchto priamok bola čo najväčšia. To bude vtedy, ak sa táto rovnobežka zo sečnice kružnice stane dotyčnicou. Ako vidíme, z obrázku je jasné, že všetky ostatné body na kružnici sú bližšie k AB, ako náš bod dotyku. Leží na prieniku osi AB a kružnice a teda vytvára rovnoramenný trojuholník ABC s najväčším možným obsahom. (Rovnobežku posúvame od AB v smere dlhšieho oblúku, aby sme zabezpečili maximálnu výšku. Ak je AB priemer, tak máme jedno riešenie v oboch polrovinách.)

b)(podľa Ľudky Šimkovej) Na základe pozorovania sme zistili, že trojuholník ABD bude mať najväčší obvod práve vtedy, keď bude rovnoramenný (teda $C = D$). Teraz ukážeme, že každý iný trojuholník ABD_k má menší obvod ako ABD. Dokreslíme kružnicu $l[D; r = |DA| = |DB|]$. Označme X prienik priamky AD s kružnicou l a X_k prienik priamky BD_k s l. Nech $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle AD_kB| = 2\delta$ (uhly sú obvodové ku kružnici k), potom $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AX_kB| = \delta$, lebo $\sphericalangle AXB$ a $\sphericalangle AX_kB$ sú obvodové k stredovému $\sphericalangle ADB$ (keďže D je stred kružnice l). Trojuholník AD_kX_k je rovnoramenný, lebo $|\sphericalangle AX_kD_k| = \delta$ a $|\sphericalangle AD_kX_k| = 180° - 2\delta$, preto $|\sphericalangle D_kAX_k| = \delta$ a $|X_kD_k| = |D_kA|$. Rovnako aj trojuholník BDX je rovnoramenný, keďže $|BD| = |DX|$ (lebo sú to polomery kružnice l). Vráťme sa teraz k nášmu zadaniu. Obvod trojuholníka ABD je $|AB|+|BD|+|DA|$, pričom $|AB|$ je konštantné. Obvod závisí len od $|BD|+|DA| = (|BD| = |DX|) = |DX|+|DA| = |AX|$, čo je priemer kružnice l. V trojuholníku ABD_k je obvod $|AB|+|BD_k|+|D_kA|$, pričom $|AB|$ je konštantné. Obvod preto závisí len od $|BD_k| + |D_kA| = (|D_kA| = |X_kD_k|) = |BD_k| + |X_kD_k| = |BX_k|$, čo nie je priemer kružnice l (úsečka neprechádza stredom D), preto $|BX_k| < |AX|$. Takže trojuholník iný ako rovnoramenný má menší obvod ako náš rovnoramenný ABD.
Iné riešenie: Máme zadanú tetivu AB. Ak na dlhšom oblúku (alebo ľubovoľnom polooblúku) budem hľadať bod D, uhol pri tomto vrchole bude vždy rovnaký $|\sphericalangle ADB| = \delta$, pretože je obvodový. Máme

teda trojuholník ABD, v ktorom je konštantná $|AB|$ a uhol δ. My sa snažíme maximalizovať jeho obvod $o = |AB| + |BD| + |DA|$.



Keďže je to trojuholník, platí v ňom sínusová veta:

$$\frac{|AB|}{\sin\delta} = \frac{|BD|}{\sin|\sphericalangle BAD|} = \frac{|AD|}{\sin|\sphericalangle ABD|}.$$

Vyjadrime z nej dĺžky strán, ktoré potrebujeme do obvodu ($|AB|$ je konštanta, takže tú môžme nechať tak). Takže:

$$|BD| = \frac{|AB|}{\sin\delta}\cdot\sin|\sphericalangle BAD|,$$

$$|AD| = \frac{|AB|}{\sin\delta}\cdot\sin|\sphericalangle ABD|.$$

Potom $o = |AB| + \frac{|AB|}{\sin\delta}\cdot(\sin|\sphericalangle BAD| + \sin|\sphericalangle ABD|)$. Maximalizovať nemôžeme $|AB|$ a $\frac{|AB|}{\sin\delta}$, keďže je to konštantné. Snažíme sa preto maximalizovať $\sin|\sphericalangle BAD| + \sin|\sphericalangle ABD| = 2\sin(|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABD|)/2 \cdot \cos(|\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle ABD|)/2$ (zo súčtového vzorca). Konštanta je tiež $2\sin(|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABD|)/2$, keďže sa to rovná $2\sin(180^\circ - \delta)/2$ (súčet uhlov v trojuholníku je 180°). Takže maximalizovať chceme $\cos(|\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle ABD|)/2$ a to je práve vtedy, keď keď je kosínus rovný jednej. A to je vtedy, keď $(|\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle ABD|)/2 = 0^\circ$ a teda $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ABD|$, takže trojuholník ABD je rovnoramenný.

c) Opäť na základe intuície sme usúdili, že XYZ má byť rovnostranný, no treba to ešte dokázať. Sporom: Nech trojuholník XYZ nie je rovnostranný a má najväčší možný obvod (niektorá dvojica strán má rôznu dĺžku, bez ujmy na všeobecnosti, nech $|XY| \neq |XZ|$). Zoberme si tetivu YZ, potom trojuholník $X'YZ$ má väčší obvod ako XYZ, ak je rovnoramenný so základňou YZ (podľa úlohy b)), čo je spor s tým, že XYZ má najväčší možný obvod, preto hľadaný trojuholník $X'YZ$ je nutne rovnostranný.

Komentár: S úlohou a) a c) nebol žiadny väčší problém, akurát väčšina z vás v a) veľmi neodôvodnila vyhovujúcu polohu bodu C a v c) prečo práve rovnostranný má najväčší obvod, ale tentokrát som za to body nestrhávala. S úlohou b) bol už väčší problém. Asi polovica z vás prehlásila, že je to rovnoramenný trojuholník, no bez odôvodnenia. Táto podúloha bola jednoznačne najťažšia, a preto bez nej ste mohli získať najviac 4 body. Obzvlášť by som chcela pochváliť originálne riešenia Ľudky Šimkovej a Maťa Vodičku (ktorý úlohu vyriešil pomocou Ptolemaiovej vety). Ostatné riešenia prebehli podobne, ako to druhé vo vzorovom riešení. Podúloha b) sa dala ešte vyriešiť aj pomocou vedomostí o elipse (stačí položiť body A a B do jej ohnísk a potom ju nafukovať).

5. Každá strana konvexného štvoruholníka je rozdelená na osem zhodných úsečiek. Spojíme príslušné body na protiľahlých stranách a vznikne šachovnica. Políčka vyfarbíme ako na skutočnej šachovnici. Dokážte, že čierna a biela plocha majú rovnaký obsah.

Opravovali: Tomáš Babej a Peťo Milošovič **Počet riešiteľov: 10**
Riešenie:
Dokážme najprv pomocné tvrdenie. Nech ABC je trojuholník a bod S je stredom úsečky AB. Potom obsahy trojuholníkov ASM a BSM sú zhodné a rovné $|AB| \cdot v_c/4$, keďže $|AS| = |BS|$. Inými slovami a stručnejšie, ťažnica rozdeľuje trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom.
Dokážme teraz zjednodušenú verziu úlohy zo zadania. Predpokladajme, že každá strana konvexného štvoruholníka $ABCD$ je rozdelená na dve zhodné úsečky. Stredy strán AB, BC, CD, DA označme postupne K, L, M, N. Taktiež označme prienik úsečiek KM a LN ako P. Ofarbime štvoruholník

$ABCD$ šachovnicovo, bez ujmy na všeobecnosti nech biele sú štvoruholníky $AKPN$, $MPLC$ a čierne $MPND$ a $KBLP$.
Pozrime sa bližšie na trojuholník ABP. Úsečka KP je ťažnicou v tomto trojuholníku a teda platí, že delí trojuholník ABP na dva trojuholníky s rovnakým obsahom. Dostávame vzťah $S(AKP) = S(BKP) = S_1$. Analogicky pre ostatné trojuholníky dostávame vzťahy $S(BLP) = S(CLP) = S_2$, $S(CMP) = S(DMP) = S_3$, $S(DNP) = S(ANP) = S_4$. Z uvedených vzťahov hravo odvodíme, že obsah bielej a čiernej časti je rovnaký a rovný $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.
Dokázali sme teda požadované tvrdenie v našej zjednodušenej verzii. Ako ho rozšíriť na úsečky rozdelené na 8 častí? Jedným z možných prístupov je nasledujúci: štvoruholník zo zadania je vlastne rozdelnený na 16 menších štvoruholníkov, a na každý z nich aplikujeme našu zjednodušenú verziu úlohy. Aby sme však mohli takto argumentovať, musíme ukázať, že úsečky vo vnútri štvoruholníka sa pretínajú v príslušných pomeroch.
Využijeme fakt, že spojnice stredov strán štvoruholníka sa rozpoľujú. Uvažujme teda štvoruholník zo zadania, označme priesečníky úsečok $S_{0,0}$ až $S_{8,8}$. Opakovanou aplikáciou uvedeného tvrdenia dostávame nasledujúce poznatky. Je potrebné si ale uvedomiť, že vždy ho aplikujeme len pre štvoruholník, o ktorého stredoch strán vieme, že sú totožné s našimi priesečníkmi úsečok.

- štvoruholník $S_{0,0}S_{8,0}S_{8,8}S_{0,8}$ - $S_{4,4}$ stred $S_{4,0}S_{4,8}$ a zároveň $S_{0,4}S_{8,4}$
- štvoruholník $S_{0,0}S_{4,0}S_{4,8}S_{0,8}$ - $S_{2,4}$ stred $S_{2,0}S_{2,8}$ a zároveň $S_{0,4}S_{4,4}$
- štvoruholník $S_{0,0}S_{2,0}S_{2,8}S_{0,8}$ - $S_{1,4}$ stred $S_{1,0}S_{1,8}$ a zároveň $S_{0,4}S_{2,4}$
- štvoruholník $S_{2,0}S_{4,0}S_{4,8}S_{2,8}$ - $S_{3,4}$ stred $S_{3,0}S_{3,8}$ a zároveň $S_{2,4}S_{4,4}$

Analogicky (osová súmernosť) dokážeme umiestnenie bodov $S_{4,1}, S_{4,2}, S_{4,3}, S_{4,4}$.

- štvoruholník $S_{0,0}S_{4,0}S_{4,4}S_{0,4}$ - $S_{2,2}$ stred $S_{2,0}S_{2,4}$ a zároveň $S_{0,2}S_{4,2}$
- štvoruholník $S_{0,0}S_{2,0}S_{2,4}S_{0,4}$ - $S_{1,2}$ stred $S_{1,0}S_{1,4}$ a zároveň $S_{0,2}S_{2,2}$
- štvoruholník $S_{2,0}S_{4,0}S_{4,4}S_{2,4}$ - $S_{3,2}$ stred $S_{3,0}S_{3,4}$ a zároveň $S_{2,2}S_{4,2}$

Znova analogicky cez osovú súmernosť dokážeme umiestenie bodov $S_{2,1}, S_{2,2}, S_{2,3}$. Týmto sme dokázali rozdelenie úsečok ich priesečníkmi v daných pomeroch pre jednu štvrtinu štvoruholníka $S_{0,0}S_{8,0}S_{8,8}S_{0,8}$, pre zvyšné tri časti štvoruholníka je dôkaz rovnaký.

Komentár: Riešení bolo pomerne málo a takmer každý správne vyriešil zjednodušenú verziu úlohy pre úsečky štvoruholníka rozdelené na dve časti. Väčšina z vás však mala problém so zovšeobecnením na verziu úlohy zo zadania, často sa vyskytli vágne, zahmlievacie argumenty, prípadne neboli argumenty žiadne. V týchto prípadoch sme museli strhnúť časť bodov, no nerobili sme to s radosťou, tak si skúste nabudúce dobre premyslieť, či sú vaše tvrdenia natoľko zrejmé, ako vyzerajú.

6. Nech pre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $f(0) = 1/2$ a zároveň pre nejaké reálne číslo a platí

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(a - y) + f(y) \cdot f(a - x) \qquad \text{pre všetky reálne } x,\ y.$$

Dokážte, že f je konštantná funkcia.

Opravovali: Laco Bačo **Počet riešiteľov: 9**
Riešenie:
Ach jaj, čo sa to odo mňa vlastne chce? V zadaní je nejaká neznáma funkcia f, o ktorej mám niečo dokázať, a nejaké reálne čísla a, x, y...

Zadanie vraví, že existuje také reálne číslo a, pre ktoré platí rovnosť

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(a-y) + f(y)\cdot f(a-x) \tag{1}$$

pre ľubovoľné reálne čísla x, y. To znamená, že táto rovnosť bude platiť, aj keď si za x a y dosadím nejaké konkrétne hodnoty. To znie fajn, veď ak budem dosadzovať dobré čísla, môžem zistiť kopec zaujímavých vlastností o tejto neznámej funkcii f. A možno zistím aj to, že je konštantná ;-).
Poďme už niečo dosadzovať. Zo zadania vieme, že $f(0) = 1/2$, skúsme to využiť. Najlepšie tak, že dosadíme do (1) $x = y = 0$. Dostávame

$$f(0) = f(0)\cdot f(a) + f(0)\cdot f(a),$$

čo znamená, že $1/2 = 2\cdot 1/2\cdot f(a)$, teda

$$f(a) = \frac{1}{2}.$$

To vyzerá dobre, práve sme zistili, akú hodnotu nadobúda funkcia f v bode a. Nezabúdajme však, že a je jedno konkrétne pevne dané číslo. Za a si nemôžeme dosadzovať nič, takže nemôžeme na základe tejto informácie prehlásiť, že f je konštantná funkcia s hodnotou $1/2$. No táto informácia o $f(a)$ môže byť veľmi užitočná. Vo vzťahu (1) máme nepríjemné členy $f(a-x)$, $f(a-y)$. Môžeme sa o nich pokúsiť niečo zistiť, alebo sa ich zbaviť. Čo tak dosadenie $y = 0$? Dostaneme

$$f(x) = f(x)\cdot f(a) + f(0)\cdot f(a-x).$$

Využijeme poznatok $f(0) = f(a) = 1/2$ a po jednoduchej úprave dostaneme ďalší užitočný vzťah:

$$f(x) = f(a-x)$$

Teraz môžeme prepísať vzťah (1) do tvaru

$$f(x+y) = 2f(x)\cdot f(y) \qquad (2).$$

Čo sa stane, ak $x = y$? No predsa $f(2x) = 2\left(f(x)\right)^2$. Veľmi užitočná vec, lebo druhá mocnina je vždy nezáporná, preto aj $f(2x) \geq 0$ pre $\forall x \in \mathbb{R}$. Takže funkcia f nemôže mať nikde zápornú hodnotu.
Dobre, a čo ďalej? Už sme dosadzovali všeličo, aby sme dostali na pravej strane $f(a)$, skúsme teraz pre zmenu dostať $f(a)$ na ľavej strane. Dosaďme do (2) $y = a - x$. Máme $f(a) = 2f(x)\cdot f(a-x)$. Ale my už vieme, že $f(a-x) = f(x)$, preto $f(a) = 2\left(f(x)\right)^2$. Po dosadení za $f(a)$ a vydelení dvoma máme

$$\left(f(x)\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

A keďže f nesmie mať nikde zápornú hodnotu, tak nutne musí platiť $f(x) = 1/2$ pre všetky reálne čísla x.
Máme už vyhraté? Nie celkom. Zatiaľ sme ukázali, že ak vôbec existuje nejaká funkcia f vyhovujúca podmienkam zo zadania, tak nutne musí byť konštantná a mať všade hodnotu $1/2$. Ale čo ak taká funkcia neexistuje? Čo ak $f(x) = 1/2$ nevyhovuje zadaniu? Musíme urobiť skúšku. Zadanie vraví, že $f(0) = 1/2$, to platí. A tiež pre nejaké a musí platiť vzťah (1). Dosadením konštantnej funkcie sa o tom ľahko presvedčíme, pretože skutočne platí $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.
Teraz sme už naozaj ukázali, že funkcia f je konštantná funkcia.

Komentár:
Väčšinou ste úlohu zvládli dobre, akurát ste zabudli overiť, že konštantná funkcia f naozaj vyhovuje. Na takéto drobnosti si nabudúce dajte väčší pozor, škoda strhnutého bodíka za takmer vyriešenú úlohu.

Niekedy ste došli ku vzťahu $|f(x)| = 1/2$ a prehlásili ste, že $f(x) = 1/2$, pretože aj $f(0) = f(a) = 1/2$. To však nie je pravda, funkcia f môže v niektorých bodoch nadobúdať hodnotu $1/2$ a v ostatných $-1/2$ a stále bude platiť $|f(x)| = 1/2$.
Dúfam, že tento vzorák pomohol tým, ktorí sa do úlohy neodvážili pustiť a nabudúce bude riešení viac. Nezabúdajte, pri úlohách tohto typu je veľmi dôležité dosadzovať niečo za premenné :) .

Konečné poradie Letného semestra 36. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Martin Vodička	Sept	GAlejKE	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	0	107
2.	Miroslav Stankovič	2. A	GPoštKE	9	7	9	9	9	-	7	9	9	9	-	9	0	100
3.	Jakub Dargaj	2. A	GPoštKE	8	9	9	9	9	-	7	9	9	7	5	7	0	98
4.	Marko Puza	2. A	GPoštKE	9	9	9	8	9	-	7	9	9	9	5	-	0	96
5.	Filip Hanzely	Sept	GKomeSB	9	9	9	9	9	3	9	9	9	9	-	8	0	92
6.	Matúš Hlaváčik	Sept	GAlejKE	8	9	9	9	-	-	7	9	9	9	9	8	0	86
7.	Alexander Ténai	1. A	GPoštKE	9	-	1	9	9	-	7	3	9	9	-	8	0	82
8.	Katarína Krajčiová	Kvinta	GAlejKE	8	9	9	8	9	-	7	9	-	-	-	-	0	77
9.	Dorota Jarošová	Kvinta	GAlejKE	9	7	4	2	-	-	7	3	9	9	5	-	0	73
10.	Filip Unoka	3. A	GPoštKE	9	9	6	9	-	-	7	9	9	8	-	-	0	66
11.	Peter Kovács	Kvinta	GAlejKE	7	7	3	2	-	-	7	1	1	2	5	-	0	49
11.	Róbert Schönfeld	1. A	GPoštKE	9	7	-	-	-	-	3	-	9	3	-	-	0	49
13.	Lucia Magurová	3. A	GPoštKE	9	7	-	9	-	9	7	3	-	4	-	-	0	48
13.	Irena Bačinská	Sexta	GKomeLY	7	7	9	-	9	-	7	9	-	-	-	-	0	48
15.	Kristína Faguľová	4. A	GPoštKE	9	9	3	2	9	-	7	3	-	4	-	-	0	46
16.	Martin Rapavý	Sexta A	GAlejKE	8	9	-	9	-	-	9	7	-	3	-	-	0	45
16.	Florián Hatala	1. A	GPoštKE	8	-	2	-	-	-	5	9	-	4	-	-	0	45
18.	Jozef Janovec	Kvinta	GAlejKE	8	7	9	2	9	-	-	-	-	-	-	-	0	44
19.	Martina Oravcová	2. A	GPoštKE	8	7	4	-	-	-	7	-	9	3	5	-	0	43
19.	Lucia Leličová	1. A	GPoštKE	6	7	1	-	-	-	7	0	-	3	5	-	0	43
21.	Anton Gromóczki	1. A	GPoštKE	6	-	4	-	6	-	7	3	-	3	-	-	0	42
22.	Štěpán Šimsa	Sept	GJJLit	-	-	-	-	-	-	6	9	6	6	7	6	0	40
23.	Richard Trembecký	Sept	GAlejKE	9	9	4	9	-	-	7	-	-	-	-	-	0	38
24.	Vladimír Macko	3. A	GHronZV	9	9	8	9	-	-	-	-	-	-	-	-	0	35
25.	Samuel Súčik	1. CG	GNovoBA	9	7	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	34
25.	Marcel Češelka	3. C	GŠkulKE	9	-	8	-	-	-	5	-	9	3	-	-	0	34
27.	Daniel Suchý	Kvinta	GGrösBA	8	7	-	-	-	-	3	-	3	-	-	-	0	32
28.	Ľudmila Šimková	Sexta	GPároNR	-	-	-	-	-	-	6	3	6	6	5	4	0	31
28.	František Lami	3. A	GPoštKE	6	5	-	8	-	-	7	-	-	5	-	-	0	31
30.	Patrícia Lakatošová	1. B	GZbroKE	8	-	4	-	-	-	5	-	-	-	-	-	0	30
31.	Viktória Valachová	2. A	GŠkolSN	8	7	3	-	9	-	-	-	-	-	-	-	0	27
31.	Ján Špak	2. B	GŠkulKE	5	7	2	-	-	0	7	2	1	3	-	-	0	27
33.	Samuel Kočiščák	1. A	GPoštKE	-	-	-	-	-	-	5	-	9	3	-	-	0	26
34.	Ján Jursa	2. A	GPoštKE	-	8	8	-	9	-	-	-	-	-	-	-	0	25
35.	Adam Ulanovský	3. A	GPoštKE	5	7	3	9	-	-	-	-	-	-	-	-	0	24
36.	Matěj Židek	9.	ZFrydCZ	9	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	22
37.	Dávid Kancián	Sept	GAlejKE	8	7	3	-	-	-	3	-	-	-	-	-	0	21
38.	Katarína Súčiková	8.	ZČelov	-	-	-	-	-	-	7	-	-	4	-	-	0	18

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
39.	Janka Muchinová	2. B	GŠkulKE	2	5	-	-	1	0	2	3	-	3	-	1	0	17
39.	Kristína Komanová	3. C	GKomeBB	6	9	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	17
41.	Jana Kižiková	3. A	GPoštKE	2	5	3	1	-	-	3	0	-	2	-	-	0	16
42.	Karolína Šromeková	2. C	GTataPP	9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	9
43.	Ivana Sopatová	3. A	GPoštKE	-	-	-	-	-	-	4	-	0	4	-	-	0	8
44.	Ján Dudič	3. A	GPoštKE	0	5	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	7
45.	Mojmír Stehlík	Sept B	GTr12KE	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	6

Pohár konštruktérov Letného semestra 36. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	19	895
2.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	9	540
3.	GKomeSB	Gymnázium Komenského 40 083 01 Sabinov	1	92
4.	GŠkulKE	Evanjelické gymnázium Škultétyho 10 040 01 Košice	3	78
5.	GKomeLY	Gymnázium Komenského 13 082 71 Lipany	1	48
6.	GJJLit	Gymnázium Josefa Jungmanna Svojsíkova 1 412 65 Litoměřice	1	40
7.	GHronZV	Gymnázium Hronská 1467/3 960 01 Zvolen	1	35
8.	GNovoBA	Gymnázium J. Hronca Novohradská 1 821 09 Bratislava 2	1	34
9.	GGrösBA	Gymnázium Grösslingova 18 811 09 Bratislava 1	1	32
10.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	31
11.	GZbroKE	Gymnáz. sv.T.Akvinského Zbrojničná 3 040 01 Košice	1	30
12.	GŠkolSN	Gymnázium Školská 7 052 01 Spišská Nová Ves	1	27
13.	ZFrydCZ	Základní škola T. G. Masaryka 1260 739 11 Frýdlant nad Ostravicí	1	22
14.	ZČelov	Súkromná základná škola Čelovce 3 991 41 Čelovce	1	18
15.	GKomeBB	Gymnázium J. A. Komenského 18 974 01 Banská Bystrica	1	17
16.	GTataPP	Gymnázium Dominika Tatarku 14 058 19 Poprad	1	9
17.	GTr12KE	Gymnázium Trebišovská 12 040 11 Košice	1	6

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu:
  LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 6 • Máj 2012 • Letný semester 36. ročníka (2011/2012)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`