STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahojte Stromáci,

Posledné veľkonočné zajace už vystrašene hľadia z poličky, ako sa k nim blíži vaša natešená ruka. Aj dievčatá si už nadobro umyli vlasy od značkových parfémov, a to je neklamný znak toho, že veľká noc je dávno za nami. Nesmúťte však, pretože máme pre vás malú útechu v podobe druhej série príkladov STROMu. Ako odmena za pilné riešenie vás čaká jesenné sústredenie v spoločnosti skvelých kamarátov a kopa zážitkov. Veľa zdaru prajú

vaši **STROM**isti

Hľadáš program na leto zahrňujúci kopu zábavy, nových kamarátov a nezabudnuteľných zážitkov? Toto všetko môžeš nájsť v Tábore mladých matematikov, ktorý organizje tvoje najobľúbenejšie združenie STROM. Tábor bude 10.–17. augusta v Kopytovskej doline. Bude to vyzerať ako sústredko, len bude troška dlhší a zábavnejší a bude tam trocha menej matiky, takže môžeš kľudne nalákať aj svojich kamarátov, a zažiť aj s nimi najlepšie dni leta. Tábor je určený tým, ktorí tento rok skončia siedmy ročník na základke až prvý ročník na strednej, alebo odpovedajúce ročníky na osemročnom gymnáziu. Prihlášku nájdeš na stránke *http://www.strom.sk/tabory* spolu s ďalšími informáciami.

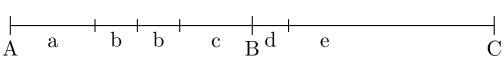
Riešenia 1. série úloh Letného semestra 37. ročníka

1. Je dané reálne číslo $a > 0$ také, že nerovnosť $1 < ax < 2$ má 3 celočíselné riešenia (pre neznámu x). Pre ktoré čísla $n \in \mathbb{N}_0$ sa môže stať, že nerovnosť $2 < ax < 3$ má práve n celočíselných riešení? Nájdite všetky možnosti.

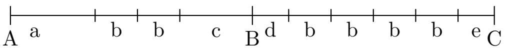
Opravovali: Tomáš Babej a Ivka Gašková **Počet riešiteľov: 21**

Riešenie:

Pozrime sa na riešenie nerovnice $1 < ax < 2$. Označme interval, ktorý vyhovuje kladným a a reálnym x v nerovnici $1 < ax < 2$ ako $(A; B)$. Nerovnici $2 < ax < 3$ vyhovujú x z intervalu $(B; C)$. Keďže funkcia ax je lineárna, veľkosť týchto dvoch intervalov je rovnaká. Stačí nám teda zistiť, koľko celočíselných x môže byť v intervale BC, ak v AB sú práve tri celé čísla.
Ukážeme, že $n > 1$. Nakreslime si úsek AC a označme na ňom riešenia nerovníc (t.j. všetky celé čísla). Na AB budú 3 celé čísla. Ukážeme, že na úseku BC potom musia byť aspoň dve celé čísla.



Označme jednotlivé úseky. Keďže medzi celými číslami sú rovnaké vzdialenosti, potom $c+d = b$. Okrem toho platí, že a aj e sú menšie alebo rovné ako b a zároveň sú obe kladné. Keďže $|AB| = |BC|$, musí platiť $a+2b+c = d+e$, čo sú veľkosti týchto dvoch intervalov. Avšak e je menšie alebo rovné ako b, a keďže $c+d = b$, potom $d < b$, čiže ľavá strana je určite väčšia ako pravá a teda sa nerovná. To je spor, a teda $n > 1$. Teraz ukážeme, že $n < 5$. Podobným postupom nakreslíme úsek AB s 3 celými číslami a úsek BC s piatimi celými číslami.



Výraz $c+d$ sa opäť rovná b, $a \leq b$, a i e sú kladné, e je nanajvýš b. Musí platiť $AB = BC$, teda

$$|AC| = 2|AB| \Rightarrow 7b + a + e = 2(a + 2b + c),$$

teda $3b + e = a + 2c$. Keďže c sa nerovná 0, a je menšie ako b, ľavá strana rovnice je väčšia ako pravá, čo je spor. Zistili sme teda, že $1 < n < 5$. Takže n môže byť iba 2, 3 alebo 4. Je vhodné sa o tom presvedčiť ešte skúškou pre zvolené a, a síce:
Pre $n = 2$ platí $a = 3/8$, riešenia prvej rovnice sú 3, 4, 5 a druhej 6, 7.
Pre $n = 3$ platí $a = 1/4$, riešenia prvej rovnice sú 5, 6, 7 a druhej 9, 10, 11.
Pre $n = 4$ platí $a = 14/47$, riešenia prvej rovnice sú 4, 5, 6 a druhej 7, 8, 9, 10.

2. Trojuholník ABC je vpísaný do kružnice k. Označme D, E, F postupne priesečníky osí uhlov pri vrcholoch A, B, C s kružnicou k. Dokážte, že AD je kolmé na EF.

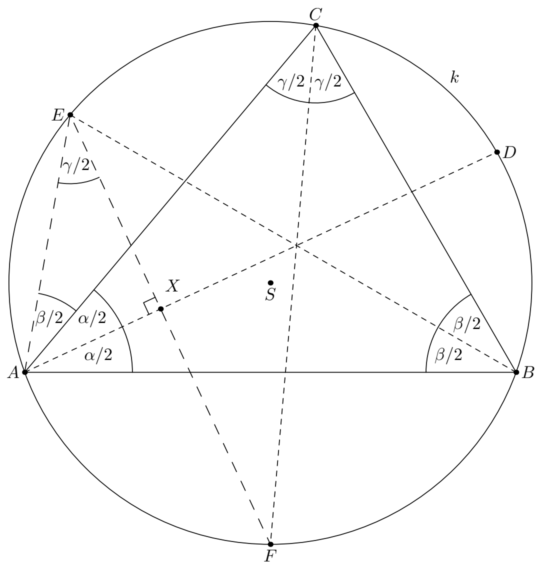
Opravovali: Janka Baranová a Rišo Trembecký **Počet riešiteľov: 22**

Riešenie:

Priesečník AD a EF označme X. V trojuholníku AXE chceme dokázať pravý uhol pri vrchole X.

Súčet uhlov v trojuholníku je 180°, stačí ukázať, že súčet uhlov pri vrcholoch A a E, teda

$$|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle FEA| = 90°.$$



Pri bežnom označení uhlov trojuholníka ABC (α pri vrchole A, β pri vrchole B a γ pri vrchole C) sú tieto uhly rozdelené na polovice osami uhlov. Tieto polovice budú s našimi hľadanými uhlami tvoriť obvodové uhly:

$$|\sphericalangle FCA| = |\sphericalangle FEA| = \gamma/2 \text{ (nad oblúkom} FA)$$
$$|\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle EAC| = \beta/2.$$

Tretí hľadaný uhol CAD je z označenia $\alpha/2$.
Súčet našich uhlov je potom

$$|\sphericalangle EAC| + |\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle FEA| = \beta/2 + \alpha/2 + \gamma/2.$$

My ale vieme, že $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, čo je po predelení dvoma 90° a zároveň súčet našich uhlov.

3. Nech P je polynóm s celočíselnými koeficientami, pre ktorý platí, že $P(0)$ a $P(1)$ sú nepárne. Dokážte, že polynóm P nemá žiaden celočíselný koreň.

Opravovali: Laco Bačo a Dano Till **Počet riešiteľov: 17**

Riešenie:

Prvé riešenie je riešenie, ktoré použili takmer všetci z vás. Druhé riešenie sme sa rozhodli uviesť aj napriek tomu, že v niektorých riešeniach bolo naznačené viac alebo menej, ale pre všetkých môže byť užitočné naučiť sa využívať uvedený poznatok. V oboch riešeniach budeme pracovať so všeobecným polynómom v tvare

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdot + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú celé čísla.
1. riešenie: Najprv si uvedomíme, čo nám hovorí nepárnosť $P(0)$. Znamená to, že absolútny člen polynómu P je nepárne číslo (pretože členy obsahujúce premennú sa vynulujú). Teraz si ešte uvedomíme, že keďže $P(1)$ je tiež nepárne číslo, tak súčet všetkých koeficientov je nepárny. Inými slovami, súčet všetkých koeficientov okrem absolútneho člena je párne číslo. Čo vieme povedať o nepárnych koeficientoch medzi nimi? Keby ich bol nepárny počet, tak ich súčet by bol nepárny, a teda súčet aj s absolútnym členom by bol párny. Preto v polynóme je párny počet nepárnych koeficientov, samozrejme okrem absolútneho člena.
Ďalej sa budeme venovať dvom prípadom, a to úvahe, že polynóm má nepárny koreň a úvahe, že polynóm má párny koreň.
Keď uvažujeme nepárny koreň, tak nepárne členy ostanú nepárne, pretože súčin nepárnych čísel je nepárne číslo a párne členy budú párne, pretože súčin nepárneho a párneho čísla je párne číslo. Takže po dosadení nepárneho koreňa máme v našom polynóme nejaký počet párnych členov, párny počet nepárnych čísel, a ešte absolútny člen. Nie je dôležité, aký je počet párnych členov, pretože ich súčet je opäť párne číslo. Súčet nepárnych členov je párne číslo (uvažujeme bez absolútneho člena), takže celkový súčet bez absolútneho člena je párne číslo. Ale keďže absolútny člen je nepárne číslo, tak dostávame nepárny výsledok. Po dosadení koreňa však má byť výsledok 0, čo je párne číslo, teda nepárny koreň náš polynóm nemá.
Keď uvažujeme párny koreň, tak nepárne členy sa stanú párnymi, pretože súčin nepárneho a párneho čísla je párne číslo a párne členy budú párne, pretože súčin párnych čísel je tiež párne číslo. Takže v našom polynóme máme samé párne čísla (už uvažujeme, že sme za premennú dosadili párny koreň) a ešte absolútny člen, čo je nepárne číslo. Súčet teda bude nepárny, pretože súčet párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo, teda opäť nastáva to, čo v prvom prípade, teda ani párne číslo nemôže byť koreňom.
Zistili sme teda, že polynóm zo zadania nemôže mať ani párny ani nepárny koreň, teda nemôže mať žiaden celočíselný koreň.
2. riešenie: Dosaďme do nášho polynómu dve navzájom rôzne celé čísla c, d a pozrime sa na rozdiel $P(c) - P(d)$:

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 - a_n d^n - a_{n-1} d^{n-1} - \cdots - a_1 d - a_0 = a_n(c^n - d^n) + \cdots + a_1(c - d)$$

Vidíme, že každý člen výrazu $P(c) - P(d)$ je násobkom čísla $c - d$. Skutočne, pre polynómy s celočíselnými koeficientami a navzájom rôzne celé čísla c, d platí[1]:

$$c - d | P(c) - P(d)$$

Tak teda aplikujme tento fakt na našu úlohu. Predpokladajme, že x je koreňom polynómu. Potom by malo platiť:

$$\begin{aligned} x - 0 \quad &| \quad P(x) - P(0) \\ x - 1 \quad &| \quad P(x) - P(1) \end{aligned}$$

Pretože x je koreň, tak $P(x) = 0$ a malo by platiť $x | P(0)$ a $(x - 1) | P(1)$. Čísla $P(0), P(1)$ sú nepárne a práve jedno z čísel $x, x - 1$ je párne, teda v jednom z tých dvoch vzťahov by malo párne číslo deliť nepárne, čo sa nemôže stať. Tým sa dostávame do sporu a náš predpoklad o existencii koreňa x je nesprávny.

Komentár: Mnohí z vás túto úlohu vyriešili správne, avšak sa častokrát stalo, že ste sa ľahkým veciam venovali veľmi podrobne a potom ste niektorú dôležitú časť nevysvetlili takmer vôbec, iba ste skonštatovali, že to platí. To bol najčastejší nedostatok 7 a 8 bodových riešení.

[1] toto je známy fakt o polynómoch s celočíselnými koeficientami a je dobré nezabúdať naň :-)

4. Na konci školského roka sa zistilo, že z ľubovoľne zvolenej skupiny aspoň piatich študentov vieme vybrať najviac 20% študentov tejto skupiny, ktorí dostali spolu viac ako 80% známok F v tejto skupine. Dokážte, že aspoň 3/4 všetkých známok F dostal jeden študent.

Opravovali: Peťo Milošovič a Monča Vaľková **Počet riešiteľov: 6**

Riešenie:

Úlohu dokážeme indukciou vzhľadom na počet študentov, ktorý si označíme n. Nakoľko vždy vyberáme aspoň piatich, nemá zmysel uvažovať menší počet študentov.

Pre $n = 5$ tvrdenie platí, pretože niektorý zo študentov má viac ako 80% známok F, a teda má aspoň $\frac{3}{4}$ známok F.

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre n študentov. V skupine $n + 1$ študentov si označme počty známok F, ktoré dostali f_1 až f_{n+1} tak, že $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq f_{n+1}$.

Ak na chvíľu zabudneme na študenta s f_{n+1} známkami, vieme, že pre zvyšných tvrdenie platí. Preto $f_n \geq 3(f_1 + \ldots + f_{n-1})$.

Pre päticu s $f_{n-3}, \ldots, f_{n+1}$ známkami podľa zadania platí $f_{n+1} > 4(f_{n-3} + \ldots + f_n)$. Zrejme platí aj $4(f_{n-3} + \ldots + f_n) \geq 4f_n$.

Z toho dostávame

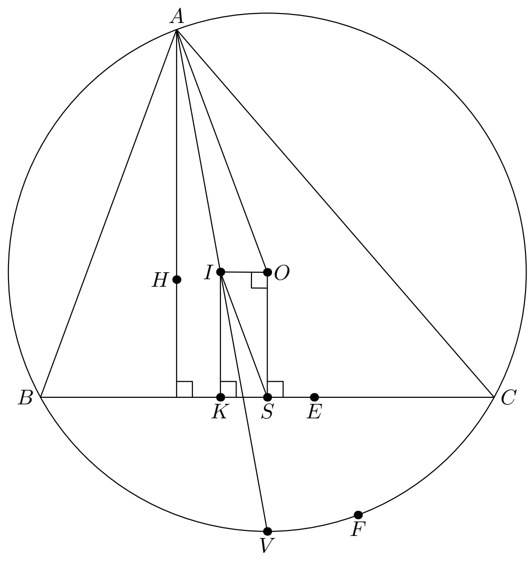
$$f_{n+1} > 4f_n = 3f_n + f_n \geq 3f_n + 3(f_1 + \ldots + f_{n-1}) = 3(f_1 + \ldots + f_n),$$

čiže $f_{n+1} > 3(f_1 + \ldots + f_n)$, takže tvrdenie platí aj pre $n + 1$ študentov.

5. Označme v trojuholníku ABC ortocentrum H, stred vpísanej kružnice I, stred opísanej kružnice O. Ďalej označme K bod dotyku vpísanej kružnice a strany BC. Dokážte, že ak priamka IO je rovnobežná s priamkou BC, tak priamka AO je rovnobežná s priamkou HK.

Opravovali: Matúš Stehlík a Matúš Hlaváčik **Počet riešiteľov: 2**

Riešenie:



Označme S stred BC a V švrčkov bod vzhľadom na A v ABC, teda stred oblúku BC a zároveň priesečník osi uhla BAC s opísanou kružnicou. Veľkosť polomeru opísanej kružnice označme R a veľkosť polomeru vpísanej kružnice si označme r.

Teraz si zobrazíme K v stredovej súmernosti cez S a obraz si označíme E. Tak isto si zobrazíme aj bod H cez S a obraz si označme ako F. Tento obraz sa nachádza na opísanej kružnici, pričom AF bude jej priemerom. Z toho vyplýva, že O leží na AF.

Úsečka EF je obrazom HK v stredovej súmernosti, teda sú rovnobežné. To znamená, že AO je rovnobežné s HK práve vtedy, keď AO je rovnobežné FE. To platí práve vtedy, keď AF je rovnobežné s FE a to platí pravé vtedy, keď E patrí AF:

$$AO||HK \Leftrightarrow AO||FE \Leftrightarrow AF||FE \Leftrightarrow E \text{ patrí } AF.$$

Z toho vieme, že E patrí priemeru, keď AO je rovnobežné s IS.

Vieme, že OE je rovnobežné s IS, keďže ide len o posunutie $O \to I$ (rovnaké ako posunutia $S \to K$ a $E \to S$). Chceme teda dokázať, že IS je rovnobežné s AO, teda že $|\sphericalangle VIS| = |\sphericalangle VAO|$.

Pre vzdialenosť stredov vpísanej a opísanej kružnice platí vzťah $|OI| = \sqrt{(R(R-2r))}$. Z trojuholníka OIS z Pytagorovej vety vieme, že:

$$|SI| = \sqrt{(|OI|^2 + |OS|^2)}$$

$$|SI| = \sqrt{(R(R-2r)+r^2)}$$
$$|SI| = R - r = |OV| - |OS| = |SV|$$

To pre nás znamená, že trojuholník ISV je rovnoramenný, teda $|\sphericalangle SIV| = |\sphericalangle SVI| = |\sphericalangle OVA|$. Platí $|OA| = |OV| = R$, teda $|\sphericalangle OVA| = |\sphericalangle VAO|$. Z tohto vyplýva, že $|\sphericalangle VIS| = |\sphericalangle VAO|$ a to je to, čo sme chceli dokázať.

6. Nekonečnú postupnosť prirodzených čísel nazveme Šupapostupnosťou, ak pre každý člen počnúc tretím platí, že je súčtom dvoch predchádzajúcich členov. Existuje taký

- konečný
- nekonečný

počet Šupapostupností, aby každé prirodzené číslo bolo práve v jednej z nich?

Opravovali: Robčo Tóth a Maťo Vodička **Počet riešiteľov: 3**

Riešenie:

a) Všimnime si, že každá Šupapostupnosť je od tretieho člena rastúca. To taktiež znamená, že rozdiely medzi dvomi susednými členmi sa stále zvyšujú. Dá sa teda očakávať, že keď máme len konečný počet šupapostupností, tak pri veľkých číslach budú veľké medzery, a teda že nejaké číslo nebude v žiadnej z nich. Poďme teda dokázať, že konečným počtom sa to nedá. A dokážeme to sporom. Nech máme množinu prirodzených čísel rozdelenú na n šupapostupností. Keďže sú rastúce, vieme z každej vybrať taký člen, ktorý je väčší ako n a nazveme ho šupačíslo. A aby sme mohli pracovať s tým, že sú rastúce, tak nech je to aspoň jej tretí člen. Takže máme n šupačísel (z každej šupapostupnosti jedno). Je jasné, že všetky predošlé členy postupnosti sú menšie ako šupačíslo postupnosti a všetky ďalšie sú väčšie (z rastúcosti). A to znamená, že rozdiel dvoch po sebe idúcich čísel v šupapostupnosti väčších ako šupačíslo (a teda za šupačíslom) je predchádzajúci člen postupnosti a ten je väčší rovný ako šupačíslo, ktoré je viac ako n. Teda rozdiel každých dvoch členov postupnosti väčších ako šupačíslo postupnosti je väčší ako n. Teraz si jednoducho zoberieme $n+1$ po sebe idúcich čísel, ktoré sú väčšie ako všetky šupačísla. Z týchto $n+1$ čísel sú z Dirichletovho princípu :) aspoň 2 v jednej šupapostupnosti. A ich rozdiel je jasne najviac n a to je spor. Teda to konečným počtom šupapostupností nejde.

b) Toto nám pre nekonečný počet postupností neprejde. Vždy, keď nejaké číslo nebude v žiadnej šupapostupnosti, tak jednoducho pridáme ďalšiu, ktorá to číslo obsahuje. Teda nekonečným počtom by to mohlo ísť. A najlepší spôsob, ako to dokázať, je vyrobiť ich. Problém je v tom, že šupapostupnosť je definovaná prvými dvoma členmi. A ak ich budeme definovať postupne, tak za prvý člen ďalšej určite zvolíme najmenšie číslo, ktoré ešte v žiadnej nie je. No ak za druhý člen zvolíme druhé najmenšie číslo, tak rýchlo zistíme, že prvá postupnosť bude 1, 2, 3, 5, 8 ... druhá 4, 6, 10, 16 ... tretia 7, 9, 16... a hneď vidno, že 16 je v dvoch postupnostiach, čo je spor. Teda takto "jednoducho" to nepôjde. Bolo by dobré, keby sme šupapostupnosť vedeli definovať prvým členom - vymyslieť rekurenciu závislú len od predošlého člena. Dobrým tipom bude geometrická postupnosť. Jej kvocient bude $(1+\sqrt{5})/2 = \varphi$. (a to preto, lebo je to koreň rovnice $x^2 - x - 1 = 0$ Koho zaujíma, prečo tej, nech nad tým porozmýšľa sám :) - napovieme: ako súvisí zlatý rez s Fibonacciho postupnosťou?) Keďže v postupnosti majú byť len prirodzené čísla, skúsme vzťah $S_{n+1} = [S_n\varphi]$, kde $[x]$ značí x zaokrúhlené na celé číslo. Teraz potrebujeme dokázať, že takto zadaná postupnosť je Šupapostupnosť. Chceme, aby platilo $S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$. Vieme, že $S_{n+1} = S_n\varphi + r$, kde $-1/2 < r < 1/2$ (r je rozdiel zaokrúhleného čísla a pôvodného čísla $S_n\varphi$). $S_{n+2} = [S_{n+1}\varphi] = [S_n\varphi^2 + r\varphi]$. My vieme, že $S_n\varphi + S_n = S_n\varphi^2$. A keďže $S_n\varphi + r$ je celé, aj $S_n\varphi + r + S_n = S_n\varphi^2 + r$ je celé. Teda platí $S_{n+2} = [S_n\varphi^2 + r + (\varphi-1)r] = S_n\varphi^2 + r + [(\varphi-1)r] = S_n\varphi^2 + r$, keďže $|(\varphi-1)r| < |1r| < 1/2$. A teraz vieme ľahko overiť, že $S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$, lebo $S_n\varphi^2 + r = S_n\varphi + r + S_n$ (opäť s využitím $\varphi^2 - fi - 1 = 0$). Každú Šupapostupnosť teraz definujeme týmto rekurentým vzťahom. Prvý člen prvej bude samozrejme 1 a prvý člen každej ďalšej bude najmenšie číslo, ktoré ešte nie je v žiadnej šupapostupnosti. Takto zrejme pokryjeme všetky prirodzené čísla. Ešte musíme ukázať, že žiadne číslo nebude v dvoch šupapostupnostiach. A to dokážeme sporom. Keby sa to stalo, zoberme si najmenšie také číslo. Zrejme to nie je prvý člen žiadnej šupapostupnosti. Nech teda $S_{n+1} = H_{m+1}$. Platí $[\varphi S_n] = [\varphi H_m]$. Avšak rozdiel týchto dvoch nezaokrúhlených čísel je najviac 1, no je to rozdiel dvoch celočíslených násobkov φ. Preto je to "násobok" φ a teda to musí byť 0. Preto $\varphi S_n = \varphi H_m$ a $S_n = H_m$, čo je spor, lebo máme ďalšie menšie číslo, ktoré je v dvoch šupapostupnostiach. Takto to ide nekonečným počtom postupností.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **29. 4. 2013**

1. Daný je obdĺžnik $ABCD$, M a N sú stredy strán BC a AD. Na polpriamke CA za bodom A zvolíme bod K. Označme L priesečník úsečiek KM a AB. Dokážte, že $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle LNA|$.

2. Nájdite všetky mocniny dvojky, z ktorých sa dá preusporiadaním číslic dostať iná mocnina dvojky. (Nuly na začiatku nie su povolené, napr. 0032 nebudeme považovať za číslo.)

3. Nech P je mnohočlen s celočíselnými koeficientami s vlastnosťou $P(a) = P(b) = P(c) = -1$, kde a, b, c sú nejaké navzájom rôzne celé čísla. Dokážte, že polynóm P nemá žiaden celočíselný koreň.

4. Máme kocku so stranou dlhou $n \in \mathbb{N}$, ktorá je postavená v súradnicovej sústave tak, že jeden jej vrchol je v bode $(0, 0, 0)$ a iný v bode (n, n, n). Potrebujeme sa dostať z bodu $(0, 0, 0)$ do bodu (n, n, n). Pohybovať sa môžeme len po povrchu kocky a len po úsečkách spájajúcich susedné body s celočíselnými súradnicami. (Dva body s celočíselnými súradnicami sú susedné, ak sa líšia len v jednej súradnici a tento rozdiel je 1.)

- Aká je dĺžka najkratšej takejto cesty z bodu $(0, 0, 0)$ do bodu (n, n, n)?
- Koľko je rôznych najkratších ciest?

5. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC, kde $|AB| = |AC|$. Označme M stred úsečky BC. Nech X je bod na kratšom oblúku MA kružnice opísanej trojuholníku ABM. Nech T je vnútorný bod uhla BMA, pre ktorý $|\sphericalangle TMX| = 90°$ a $|TX| = |BX|$. Dokážte, že hodnota rozdielu $|\sphericalangle MTB| - |\sphericalangle CTM|$ nezávisí na voľbe X.

6. Nech k, n sú prirodzené čísla, pričom k je nepárne. Dokážte, že súčet $1^k + 2^k + \cdots + n^k$ je deliteľný súčtom $1 + 2 + \cdots + n$.

Poradie po 1. sérii Letného semestra 37. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Trieda	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Miroslav Stankovič	3. A	GPoštKE	9	9	9	9	9	-	0	45
2.	Jakub Šafin	4. G	GMasaMI	8	9	9	9	-	7	0	42
3.	Žaneta Semanišinová	Kvinta A	GAlejKE	9	9	9	-	-	-	0	36
4.	Jozef Lukáč	3. C	GJiráBJ	7	9	7	9	-	3	0	35
5.	Henrieta Micheľová	Kvinta A	GAlejKE	5	9	9	2	-	-	0	34
6.	Václav Krchňák	1. A	GJaroCZ	-	9	9	-	-	-	0	27
6.	Šimon Soták	Kvinta A	GAlejKE	-	9	9	-	-	-	0	27
6.	Roman Staňo	2. A	GPoštKE	9	9	9	-	-	-	0	27
9.	Marko Puza	3. A	GPoštKE	0	9	7	9	-	-	0	25
10.	Alexander Ténai	2. A	GPoštKE	7	8	9	-	-	-	0	24
11.	Kristína Mišlanová	Kvinta A	GAlejKE	4	-	9	-	-	-	0	22
11.	Ľudmila Šimková	Septima	GPároNR	5	9	8	-	-	-	0	22
11.	Daniel Onduš	Kvinta A	GAlejKE	9	-	4	-	-	-	0	22
14.	Jakub Dargaj	3. A	GPoštKE	-	9	9	-	-	-	0	18
14.	Soňa Feciskaninová	Kvinta A	GAlejKE	-	9	-	-	-	-	0	18
14.	Samuel Krajči	Sekunda	GAlejKE	-	9	-	-	-	-	0	18
17.	Peter Kovács	Sexta	GAlejKE	2	8	7	-	-	-	0	17
18.	Vladislav Vancák	Septima B	GAlejKE	6	9	-	-	-	-	0	15
18.	Róbert Schönfeld	2. A	GPoštKE	6	9	-	-	-	-	0	15
18.	Dorota Jarošová	Sexta	GAlejKE	1	9	5	-	-	-	0	15
18.	Ján Špak	2. B	GŠkulKE	6	9	-	-	-	-	0	15
22.	Vladimír Sabo	Septima B	GAlejKE	4	5	1	0	0	0	0	10
22.	Martina Oravcová	3. A	GPoštKE	1	9	-	-	-	-	0	10
24.	Anton Gromóczki	2. A	GPoštKE	-	9	-	-	-	-	0	9
24.	Florián Hatala	2.A	GPoštKE	9	-	-	-	-	-	0	9
26.	Jozef Janovec	Sexta	GAlejKE	5	-	-	-	-	-	0	5
27.	Ján Kurimský	1.B	GŠevcPO	2	-	-	-	-	-	0	4

Pohár konštruktérov Letného semestra 37. ročníka

P.	Skratka	Škola	P.r.	Body
1.	GAlejKE	Gymnázium Alejová 1 041 49 Košice	12	239
2.	GPoštKE	Gymnázium Poštová 9 042 52 Košice	9	182
3.	GMasaMI	Gymnázium Pavla Horova Masarykova 1 071 79 Michalovce	1	42
4.	GJiráBJ	Gymnázium Jiráskova 12 085 70 Bardejov	1	35
5.	GJaroCZ	Gymnázium tř. Kpt. Jaroše 14 658 70 Brno	1	27
6.	GPároNR	Gymnázium Párovská 1 950 50 Nitra	1	22
7.	GŠkulKE	Evanjelické gymnázium Škultétyho 10 040 01 Košice	1	15
8.	GŠevcPO	Gymnázium sv. Moniky Tarasa Ševcenka 1 080 01 Prešov	1	4

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

- Jednote slovenských matematikov a fyzikov, pobočka Košice
- Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach
- Agentúre na podporu výskumu a vývoja prostredníctvom projektu: LPP-0057-09 Rozvíjanie talentu prostredníctvom korešpondenčných seminárov a súťaží

Názov **STROM** – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Apríl 2013 • Letný semester 37. ročníka (2012/2013)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`