STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Milé dzeci,

také veci.

Je tu nový **STROM**,

je to zlom.

Riešte všetci,

milé dzeci.

Ak neschvália to lingvisti,

písali to **STROM**isti.

Posledná veta mi príde veľmi zmysluplná a spisovná, takže neviem, čo by sa s tým dalo zmeniť.

Váš Dano

Košický Matboj

24. októbra 2014 v CVČ Domino v Košiciach sa uskutočnil už 14. ročník matematickej súťaže Košický Matboj. Zarátať si prišlo 44 družstviev z 23 rôznych gymnázií z 13 rôznych miest. K víťazstvu blahoželáme tímu v zložení Róbert Schönfeld, Pavol Petruš, Ádám Urbán, Martin Masrna z Gymnázia Poštová 9 v Košiciach. Ako si viedli ostatné tímy nájdete na `https://seminar.strom.sk/media/matboj-2014-poradie.pdf`. Myslíte si, že by ste to zvládli lepšie? Skúste si zrátať príklady z tohtoročného Matboja. Príklady a výsledky nájdete na `https://seminar.strom.sk/media/matboj-2014.pdf`.

Matematický krúžok

Aj v školskom roku 2014/2015 sa na **Prírodovedeckej fakulte UPJŠ** v Košiciach na Jesennej 5 koná každý týždeň **vo štvrtok o 15:00** matematický krúžok, ktorý je zameraný hlavne na prípravu na Matematickú olympiádu v kategóriách A, B a C. Krúžku sa môže zúčastniť ktorýkoľvek stredoškolák (ale i šikovný základoškolák), ktorý sa chce venovať Matematickej olympiáde. Viac informácií (vrátane preriešených úloh z minulých ročníkov) nájdeš na stránke krajskej komisie MO: `http://umv.science.upjs.sk/mo`.

Riešenia 1. série úloh Zimného semestra 39. ročníka

1.
Opravovala: Kristína Faguľová
Počet riešiteľov: 80

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí, že 6 delí $n^3 + 11n$.

Riešenie:

Túto úlohu ste poväčšine riešili dvoma spôsobmi: matematickou indukciou alebo pomocou zvyškových tried.

Pozrime sa najprv na matematickú indukciu. V prvom kroku overíme, že tvrdenie platí pre $n = 1$, z čoho dostávame $1^3 + 11 \cdot 1 = 12$, čo je číslo deliteľné šiestimi. Takže tvrdenie pre $n = 1$ platí.

V druhom kroku matematickej indukcie budeme predpokladať, že tvrdenie platí pre $n = k$ a ukážeme, že platí aj pre $n = k + 1$.

$$(k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = (k^3 + 11k) + 3(k^2 + k) + 12 = (k^3 + 11k) + 3k(k+1) + 12$$

Z indukčného predpokladu vieme, že 6 delí $k^3 + 11k$, zároveň 6 delí $3k(k+1)$, keďže jedno z čísel k a $k+1$ je párne. Zjavne 6 delí 12, a teda z toho vyplýva, že tvrdenie platí aj pre $n = k+1$.

Pozrime sa na riešenie metódou zvyškov. Každé prirodzené číslo n vieme napísať ako násobok šiestich plus zvyšok po delení šiestimi, teda 6k + z, pričom $k \in N$ a $z \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

$$\begin{aligned}(6k+x)^3 + 11(6k+x) &= 216k^3 + 72k^2x + 6kx^2 + 66k + 36k^2x + 12kx^2 + x^3 + 11x \\ &= 6 \cdot (36k^3 + 12k^2x + kx^2 + 11k + 6k^2x + 2kx^2) + x^3 + 11x\end{aligned}$$

Teda ako vidíme, stačí overiť deliteľnosť výrazu $x^3 + 11x$ číslom 6.

$$\begin{array}{lll} x=0 & 0^3 + 11 \cdot 0 = 0 & 6 \mid 0 \\ x=1 & 1^3 + 11 \cdot 1 = 12 & 6 \mid 12 \\ x=2 & 2^3 + 11 \cdot 2 = 30 & 6 \mid 30 \\ x=3 & 3^3 + 11 \cdot 3 = 60 & 6 \mid 60 \\ x=4 & 4^3 + 11 \cdot 4 = 108 & 6 \mid 108 \\ x=5 & 5^3 + 11 \cdot 5 = 180 & 6 \mid 180 \end{array}$$

Keďže x nadobúda hodnoty (0, 1, 2, 3, 4 a 5), overili sme všetky možnosti a tvrdenie platí pre všetky prirodzené čísla n.

Keďže $6 = 2 \cdot 3$ naskytuje sa nám možnosť riešenia tejto úlohy tak, že sa pozrieme na zvyšky čísla n po delení dvomi a tromi. To si môžte skúsiť nadoma.

Uvedieme ešte jedno zaujímavé a veľmi stručné riešenie

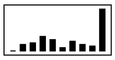
$$n^3 + 11n = n(n^2 + 11) = n((n^2 - 1) + 12) = n(n-1)(n+1) + 12n.$$

Pričom $n-1$, n, $n+1$ sú tri po sebe idúce čísla, takže sú deliteľné 3! a 6 delí taktiež $12n$.

Komentár: Čo k tomu dodať. Bola to prvá úloha prvej séria, a prekvapivo nebola náročná. Mnohí z vás získali bezproblémov plný počet bodov. Možno malá rada pre tých, ktorí sa pustili cestou indukcie. Je dobré si uvedomiť, čo je indukčný predpoklad a čo ním chceme dokázať. Ak ste to vo vzorovom riešení prehliadli, máte to tu ešte raz: V druhom kroku matematickej indukcie budeme predpokladať, že tvrdenie platí pre $n = k$ a ukážeme, že platí aj pre $n = k+1$.

2. Opravovali: Ivka Gašková a Richard Trembecký

Počet riešiteľov: 66



Štvorciferné číslo $\overline{abcd}$, ktoré spĺňa podmienky

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2,$$

$$a + b = c + d$$

nazývame *šikovné*. Koľko existuje *šikovných* štvorciferných čísel?

Riešenie:

Upravíme 2. rovnosť:

$$a + b = c + d$$

$$a - d = c - b$$

Upravujeme 1. rovnosť:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

$$a^2 - d^2 = c^2 - b^2$$

$$(a+d)(a-d) = (c+b)(c-b)$$

Dosadíme za $(c-b)$:

$$(a+d)(a-d) = (c+b)(a-d)$$

Núka sa nám rovnicu predeliť výrazom $(a-d)$, ale to by sme museli predpokladať, že $a - d \neq 0$. Preto najprv ukážeme, čo sa deje vtedy, keď $a - d = 0$, teda $a = d$.

1.) Dosadíme do 2. rovnosti za d:

$$a + b = c + d$$

$$a + b = c + a$$

$$b = c$$

Zistili sme, že naše číslo bude v prípade $a = d$ v tvare $abba$, pričom a a b môžu byť rovnaké.

2.) Predpokladajme teraz $a \neq d$ a predeľme spomínanú rovnicu výrazom $(a-d)$:

$$(a+d)(a-d) = (c+b)(a-d)$$

$$a + d = c + b$$

Použime znovu vzťah vyjadrený z prvej rovnice a sčítajme ho s touto:

$$a - d = c - b$$
$$2a + d - d = 2c + b - b$$
$$a = c$$

Dosadíme do 2. rovnosti za c:

$$a + b = a + d$$
$$b = d$$

Zistili sme, že naše číslo bude v prípade $a \neq d$ v tvare $abab$, pričom a a b nemôžu byť rovnaké ($a \neq d = b$).

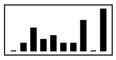
Koľko teda takých čísel existuje?

Čísel v tvare $abba$ je $9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 90$ (keďže na prvom miestne nesmie byť 0) a čísel v tvare $abab$ je $9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 = 81$ (keďže $a \neq b$, tak za b môžeme dať o cifru menej). Výsledný počet teda je: $90 + 81 = 171$ šikovných čísel.

Komentár: Mnoho z vás úlohu riešilo správne, aj keď sa občas stalo, že ste niečo zabudli vziať do úvahy. Na čo by sme ale chceli apelovať je, že aj keď sa vám niekedy niektoré veci zdajú príliš zjavné, nemusia byť, a preto sa vždy oplatí popísať, prečo si myslíte, že to tak je. Niekedy možno totiž tým, že nad tým veľa premýšľate, tak to beriete ako samozrejmosť, ale vedúci ktorý vidí už len samotné riešenie, nemusí vidieť spojitosti, ktoré máte vy v hlave.

3. **Opravoval: Matúš Stehlík**

Počet riešiteľov: 38



Robot Karol stojí na jednom z bodov nekonečnej štvorcovej mriežky. V hlave má dve pamäťové jednotky A a B. Keď sa pohne o jednu štvorcovú dĺžku smerom hore, číslo v jednotke A sa zväčší o 1. Naopak, ak sa pohne smerom dole, toto číslo sa zmenší o 1. Ak sa pohne smerom doprava, do jednotky B sa pričíta číslo v A a naopak, ak sa pohne smerom doľava, toto číslo sa od čísla v jednotke B odčíta. Robot Karol sa pri svojom pohybe riadi nasledovnými pravidlami:

- vždy sa posúva iba do najbližších susedných bodov siete (smerom hore, dole, doprava alebo doľava, nie uhlopriečne)
- nikdy sa neposunie do bodu mriežky, ktorý už navštívil (ak nejde o počiatočný bod trasy)

Ak viete, že robot Karol má na začiatku v oboch pamäťových jednotkách hodnotu 0, dokážte, že po ľubovoľnej prechádzke po štvorcovej sieti, pri ktorej sa vráti naspäť na pôvodné miesto, sa v pamäťovej jednotke B bude nachádzať číslo, ktorého absolútna hodnota udáva obsah plochy, ktorú svojou trasou ohraničil.

Riešenie:

V zadaní nebolo úplne jasne povedané, že robot skončí po prvom návrate na začiatok, napriek tomu uvažujme len takéto správanie robota. Najprv dokážeme pomocné tvrdenia. Ak sa vám ich platnosť zdá triviálna, kľudne dôkazy preskočte.

Vezmime si nejakú Karolovú prechádzku. Potom platí:

Tvrdenie 1. Aboslútna hodnota B na konci nezávisí od smeru prechádzky.

Tvrdenie 2. Hodnota v B po prvom návrate na začiatok sa nezmení ak zemníme počiatočnú hodnotu v jednotke A.

Tvrdenie 3. Vezmime útvar, ktorý Karol ohraničil. Hodnota v B na konci prechádzky sa nezmení ak by tento útvar obišiel rovnakým smerom začínajúc v inom bode na hranici.

Dôkaz 1. Nech má na konci v pamäťovej jednotke B hodnotu S. Zrejme má v jednotke A nulu, lebo musel prejsť rovnako veľa krovom hore ako dole. Ak by sa teraz vracal po trase, ktorou útvar obišiel, tak v každom bode majú jeho pamäťové jednotky rovnaké hodnoty ako pri prechádzke smerom tam. Na konci tejto spätnej prechádzky má $B = 0$, takže počas nej sa B zmenšila o S. Zmeny jednotky B nezávisia od jej hodnoty, takže ak by začal spätnú prechádzku s $B = 0$, po jej ukončení by mala hodnotu $B = -S$.

Dôkaz 2. Robot sa vráti na začiatok, preto musí prejsť rovnako veľa krokov doľava ako doprava. Pri každom kroku vpravo (vľavo) sa počiatočná hodnota A pripočíta (odpočíta) k B. Takže ju pripočítame a odpočítame rovnako veľa krát a na výslednú hodnotu B nemá vplyv.

Dôkaz 3. Zmeňme hodnotu A v novom začiatku na takú ako mala pri pôvodnej prechádzke v tomto bode, podľa tvrdenia 2 to výslednú hodnotu B nezmení. Pri trase z nového začiatku robot každý úsek prechádza rovnakým smerom ako pôvodne a má v ňom rovnakú hodnotu A ako pôvodne. Takže každý krok zmení hodnotu B rovnako ako predtým, akurát v inom poradí, čiže B bude nakonci rovnaké.

Zrejme robot ohraničí súvislý útvar. Musel ho mať celý čas po jednej strane od seba. Pre jednoduchosť ďalej predpokladajme, že robot obíde ohraničenú plochu v smere hodinových ručičiek, t.j. bude mať [tvar napravo od seba počas celej prechádzky. Platnosť tvrdenia pre ostatné prechádzky vyplýva z tvrdenia 1. Ďalej podľa tvrdenia 3 stačí uvažovať prípady kedy je celý útvar napravo od počiatočného bodu, lebo začiatok si môžeme zvoliť kdekoľvek na trase.

Tvrdenie zo zadania dokážeme najprv len pre obdĺžniky so šírkou 1 a potom matematickou indukciou vzhľadom na obsah pre ostatné prechádzky.

(0) Pre obdĺžniky $1 \times n$, $n \geq 1$. Zjavne majú obsah n. Počas prechádzky sa B zmení len dvakrát. Pri prechode hornou (resp. dolnou) sranou robot pôjde doprava (resp. doľava), aby mal útvar po pravej strane. Nech pri prechode hornou stranou má hodnotu $A = a$, ktorá sa do B pripočíta. Pri prechode dolnou bude $A = a - n$, ktorá sa od B odpočíta. Teda na konci je $B = a - (a - n) = n$.

Pre zvyšné útvary dokážeme tvrdenie matematickou indukciou vzhľadom na obsah ohraničenej oblasti. Dokážeme, že ak išiel v smere hodinových ručičiek, tak pri prvom návrate na začiatok prechádzky bude mať v jednotke B obsah útvaru, ktorý ohraničil (kladné číslo).

(1) Ak je obsah ohraničenej oblasti 1, tak to platí podľa (0).
(2) Teraz predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky Karolove prechádzky okolo útvarov s obsahom S, $n > S \geq 1$. Vezmime teraz nejakú prechádzku, ktorou Karol ohraničí plochu s obsahom $n > 1$, ukážeme, že na jej konci bude mať v pamäťovej jednotke B číslo n.

Ak má ohraničená plocha šírku 1, tak tvrdenie vyplýva z (0). Ak nie, pozrime na časť útvaru najviac vpravo. Ak by sme odtiaľ odsekli najpravejší stĺpec šírky 1, tak sa bude skladať z niekoľkých obdĺžnikov so šírkou 1. a zvyšný útvar sa nám možno rozpadne na nejaké časti s obsahmi menšími ako n. Ak na miesta kde sme rezali doplníme karolove kroky smerom dole (resp. hore) v častiach vľavo (resp. vpravo) od rezu, dostaneme niekoľko menších Karolovych prechádzok okolo útvarov s obsahmi menšími ako n.

Z indukčného predpokladu vieme, že prechádzky okolo nich, zväčšia B o ich obsah. Na základe tvrdení zo začiatku vieme, že je jedno kde zvolíme začiatočný bod prechádzky okolo nich alebo akú zvolíme začiatočnú hodnotu A na jej začiatku. Zvoľme teda hodnoty A tak, aby boli všade počas prechádok okolo útvarov rovnaké ako pri pôvodnej karolovej prechádzke. Teraz vidíme, že k pôvodnej prechádzke sme pridali len nejaké kroky hore a dole, ktoré nemenia B a všetky kroky vľavo a vpravo sú rovnaké ako predtým, dokonca s rovnakým A. Prejdenie pôvodnej prechádzky potom zmení B rovnako ako prejdenie prechádzok okolo jednotlivých menších útvarov, totiž započítame všetko, len možno v inom poradí. Preto hodnota jednotky B na konci bude rovnaká ako súčet obsahov týchto útvarov, čo je presne obsah útvaru, ktorý karol ohraničil.

Komentár: Porozumieť nejako sedliackym rozumom, prečo by tvrdenie malo platiť bolo pomerne ľahké. No málokomu sa podarilo napísať úplne spávny dôkaz. Plný počet bodov sme dávali aj za to, že niekto poukázal na detailnú nepresnosť v zadaní a našiel protipríklad tvrdenia (ak by sme neskončili prechádzku po prvom návrate na začiatok). Z nášho dôkazu je zjavné, ako by mal vyzerať. Musíme po prechode začiatkom zmeniť orientáciu, aby sa nám do B pridal druhý obsah s opačným znamienkom ako prvý. Ponaučenie je:

1. Nie všetko, čo je na oko zrejmé, sa dá hravo dokázať.

2. Nikto nie je dokonalý/aj múdry schybí.

3. Oplatí sa byť detailista a poukázať na chybu v zadaní. :-)

4.

Opravoval: Róbert Tóth
Počet riešiteľov: 76

Máme desať vrecúšok a v každom je 100 mincí. V deviatich z nich sú pravé mince, ktoré vážia 10 gramov a v jednom sú falošné mince vážiace 11. Ako pomocou jedného váženia a digitálnej váhy zistíte, v ktorom vrecúšku sú falošné mince?

Riešenie:

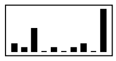
Keďže máme až desať vrecúšok a iba jediné váženie, jedným z prvých nápadov by malo byť na váhu položiť mince z každého vrecúška, prípadne každého okrem jedného. Ak by sme tak totiž neurobili, môže sa nám stať, že nezískame žiadnu informáciu o práve tých vrecúškach, kde sa minca nachádza. Vyberieme si prvú možnosť. Najprv skúsime, čo by sa stalo, ak by sme na váhu dali rovnaké počty z každého vrecka. Vidíme, že by to nikam neviedlo. Prirodzene nás teda napadne dať na váhu z každého vrecka iný počet mincí. Vyskúšame, čo to spraví a aha! Funguje to a môžeme sa pustiť do písania riešenia, ktoré by malo vyzerať nejako takto.

Označme vrecúška číslami od 1 do 10 (prípadne inou rôznou desaticou) a na váhu položme z každého vrecka toľko mincí, aké je jeho číslo (snáď sme takí tragédi, že sme nejaké vrecko označili číslom väčším ako 100). Ak by boli všetky mince pravé, váha by ukazovala 550 gramov. Váha však bude ukazovať presne o toľko gramov viac, ako je číslo vrecka, kde boli falošné mince, čím sme ho našli.

Komentár: Úloha bola naozaj jednoduchá, ale veľmi poučná z hľadiska toho, či ste schopní napísať stručné riešenie, ktorému nič nechýba. Ak ste na svojom riešení objavili jabloň, tak sa vám to podarilo. Ak nie, tak sa skúste inšpirovať do budúcna.

5. Opravoval: Tomáš Babej

Počet riešiteľov: 24



Nech H je ortocentrum ostrouhlého trojuholníka ABC. Dotyčnice z bodu A ku kružnici k zostrojenej nad priemerom BC sa dotýkajú kružnice k v bodoch P a Q. Dokážte, že body P, Q, H ležia na jednej priamke.

Riešenie:

Označme S stred strany BC (a teda stred našej kružnice k) a päty výšok z vrcholov A,B,C postupne D,E,F.

Našou úlohou je dokázať kolinearitu troch bodov, pričom dva z nich, P a Q, ležia na kružinici k. Keďže body P a Q sú body prieniku dotyčníc z bodu A, ležia taktiež na Tálesovej kružnici nad priemerom AS (premyslite si ako konštruujeme dotyčnice), ktorú označme t.

Oba body P a Q majú k obom kružniciam rovnakú (nulovú) mocnosť a je teda zrejmé, že priamka PQ je chordálou kružníc k a t. Ponúka sa nám teda jedinečná možnosť, ako dokázať, že body P,Q a H ležia na jednej priamke. Stačí ukázať, že H má rovnakú mocnosť ku kružniciam k a t a teda leží na ich chordále.

Pozrime sa teraz bližšie na štvoruholník $ABDE$. Tieto štyri body ležia na kružnici nad priemerom AB, označme ju ℓ. Pre mocnosť m bodu H ku kružnici ℓ platí

$$m = |AH| \cdot |HD|$$

Avšak mocnosť daného bodu nezávisí od vybranej sečnice prechádzajúcej daným bodom, a teda mocnosť m bodu H ku kružnici ℓ môžeme vyjadriť ako aj:

$$m = |BH| \cdot |HE|$$

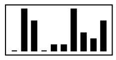
Ostáva si už len uvedomiť, že body A a D ležia aj na kružnici t, a teda m je mocnosť bodu H aj ku kružnici t. Analogicky, body B a E ležia aj na kružnici k, z čoho vyplýva, že m je mocnosť bodu H aj ku kružnici k.

Ukázali sme teda, že bod H má rovnakú mocnosť m ku kružniciam k a t, z čoho plynie, že H leží na chordále PQ, a teda body P,Q,H sú kolineárne.

Komentár: Zásadným problémom mnohých riešení bolo implicitné využitie faktu, že body P, Q a H ležia na jednej priamke. Túto nášľapnú mínu odpálite napríklad aj vtedy, ak budete využívať fakt, že uhly QHB a PHX sú vrcholové. Potom už tvrdenie zo zadania ľahko dokážete, napríklad dorátaním uhlov a zistením, že uhol PHQ má veľkosť 180 stupňov. No to sme použili tvrdenie X na to, aby sme dokázali tvrdenie X! Týmto spôsobom by sme však vedeli dokázať ľubovoľné tvrdenie. Nepríjemnému problému s nesprávnymi predpokladmi môžete predísť použitím krivého náčrtu, v ktorom body P, H a Q neležia na jednej priamke.

6. Opravoval: Maťo Vodička

Počet riešiteľov: 31

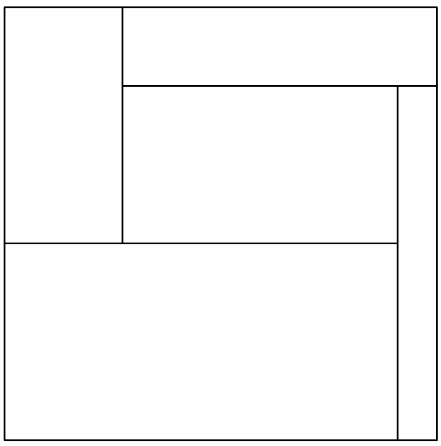


Určte všetky prirodzené čísla m, pre ktoré sa dá štvorec $m \times m$ rozdeliť na päť obdĺžnikov, ktorých dĺžky strán sú $1, 2, \ldots, 10$ v nejakom poradí.

Riešenie:

Máme zistiť, ktoré štvorce sa nejako dajú rozdeliť. Začať bezhlavo skúšať však nemusí (=nie je) byť ten najlepší nápad. Na začiatok by sme mohli skúsiť odhadnúť aký veľký má ten štvorec byť. Jeho obsah je totiž súčet obsahov tých 5 obdĺžnikov. Veľa z vás povedalo, že najväčší možný je $10 \cdot 9 + 8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1$. Intuitívne to je jasné (že chceme náobiť veľké čísla s veľkými aby sme dostali, čo najväčší výsledok), no treba to aj dokázať.

Ľahko si uvedomíme, že pre 4 čísla $a > b > c > d$ platí: $ab + cd > ac + bd > ad + bc$. Prvú totiž môžeme ekvivalentne upraviť na $(a - d)(b - c) > 0$ a tú druhú na $(a - b)(c - d) > 0$, ktoré zrejme platia.



Preto ak si zoberieme ľubovoľných 5 obdĺžnikov so stranami $1, 2, \ldots, 10$, tak ak nájdeme nejaké 2 so stranami $a > b > c > d$ a neplatí, že jeden má strany a, b a druhý c, d, tak môžeme ich dĺžky strán zameniť, aby to platilo, a súčet obsahov sa nám zväčší. Ľahko vidno, že v tomto môžeme pokračovať, až kým to neplatí pre všetky obdĺžniky, a to sme presne v prípade, ktorý sme uvažovali na začiatku. Teda najväčší možný súčet obsahov je naozaj $10 \cdot 9 + 8 \cdot 7 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 190$.

Úplne obdobným spôsobom môžeme dokázať, že najmenší možný súčet obsahov je $10 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 110$.

Teda platí $110 \leq m^2 \leq 190$, a keďže m je prirodzené, tak máme $11 \leq m \leq 13$.

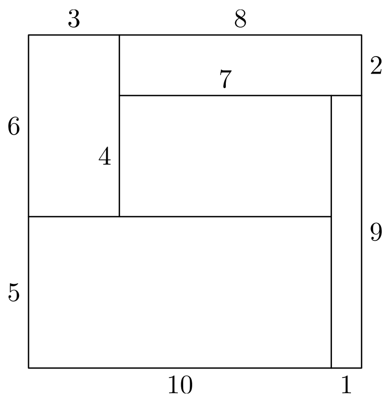
To je super, lebo to znamená, že máme už len 3 možnosti. Skúsme sa teraz pozrieť na to, ako môžeme štvorec rozdeliť na 5 obdĺžnikov, tak aby žiadne 2 nemali rovnako dlhé strany.

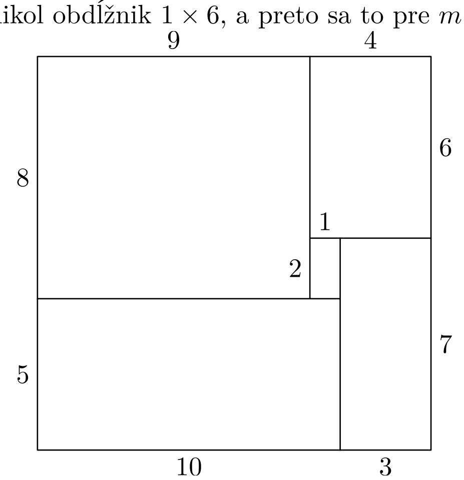
Zrejme do každého rohu štvorca musíme dať 1 obdĺžnik (nemôže byť ten istý, keďže strana štvorca je dlhšia ako 10). A tie obdĺžniky sú rôzne vysoké, a teda ľahko vidíme, že jediný spôsob ako ich dať tak, aby zostal nepokrytý len posledný obdĺžnik, je ten, že sa vždy dva v susedných rohoch dotýkajú a v strede ostane akurát miesto na posledný.

Teraz už len do nášho obrázka musíme dosadiť čísla ako dĺžky strán obdĺžnikov. Vidno, že súčet strán 2 obdĺžnikov pri jednej strane štvorca musí dávať n. (čo keď sa zamyslíte nám dáva iný spôsob ako odhadnúť veľkosť štvorca - bez babrania sa z obsahmi obdĺžnikov).

Teda musíme nájsť 4 dvojice čísel so súčtom m. Pre $m = 13$, to sú nutne $3 + 10, 4 + 9, 5 + 8, 6 + 7$. A preto vnútorný obdĺžnik má rozmery 1 a 2. Potom už nie je žiaden problém dopasovať ostatné tak, aby to sedelo.

Pre $m = 12$ to jasne sú $2 + 10, 3 + 9, 4 + 8, 5 + 7$ a vnútorný obdĺžnik má nutne rozmery 6 a 1. My vieme, že strana vnútorného obdĺžnika je rozdiel strán obdĺžnikov pri hornej a dolnej (resp. ľavej a pravej) strane štvorca. No a ľahko vidno, že ak dáme oproti sebe dvojice dĺžok strán 2, 10 a 4, 8 všetky rozdiely strán oproti sebe budú párne. A ak ich nedáme oproti sebe, všetky budú nepárne. Preto nie je možné, aby v strede vznikol obdĺžnik 1×6, a preto sa to pre $m = 12$ nedá.





Nakoniec pre $m = 11$ máme 5 možností ako vyskladať v súčte 11 a preto nevieme, aké rozmery bude mať vnútorný obdĺžnik. Tu treba skrátka len skúšať :) a ak sme dostatočne trpezliví určite nájdeme (zhodou okolností jediné) riešenie s vnútorným obdĺžnikom 4×7 ako na obrázku.
Záver je, že vyhovujúce n sú 11 a 13.

Komentár: Ako vidieť riešenie pozostávalo z veľa krokov, a samozrejme skoro všetky sa dali robiť aj trocha inak. V každom prípade nejaké podobné kroky urobilo veľa z vás, avšak často ste ich zabudli zdôvodniť. Napríklad prečo je maximálny súčet taký, alebo prečo sa štvorec iným spôsobom na tých 5 obdĺžnikov rozdeliť nedá. Aj keď vám to príde ako (skoro) jasné, skúste vždy napísať aspoň 1 vetou prečo by to malo platiť. A ak sa vám nedarí niečo zostrojiť, skúšajte viac :) (no dobre, alebo ukážte, že sa to nedá)

Poradie po 1. sérii Zimného semestra 39. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kategória	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 4.	Radovan Švarc	S4	9	9	9	9	9	9	0	54
	Pavol Drotár	S2	9	9	9	9	9	-	0	54
	Jozef Lipták	S2	9	9	9	9	9	2	0	54
	Martin Števko	S1	9	9	9	9	9	7	0	54
5. - 6.	Juraj Mičko	S2	8	8	9	9	9	-	0	51
	Martin Masrna	S1	9	9	9	9	-	6	0	51
7.	Samuel Krajči	Z9	9	5	9	9	9	-	0	50
8. - 10.	Daniel Onduš	S3	9	8	7	9	6	9	0	48
	Viktória Brezinová	Z9	7	9	4	9	7	7	0	48
	Tomáš Kekeňák	S3	9	9	9	9	4	8	0	48
11.	Matěj Konečný	S4	9	9	-	9	9	9	0	45
12.	Jakub Mach	S2	9	5	7	9	-	8	0	43
13. - 14.	Henrieta Micheľová	S3	9	9	6	9	-	9	0	42
	Ján Kurimský	S3	9	9	7	7	9	1	0	42
15. - 17.	Martin Spišák	S1	9	9	-	9	-	5	0	41
	Eduard Oravkin	S3	9	9	7	9	-	7	0	41
	Oľga Prachářová	S3	8	6	9	9	7	2	0	41
18.	Daniel Staško	S4	9	9	3	9	-	9	0	39
19.	Martina Šalamúnová	S3	9	9	5	9	0	6	0	38
20.	Eduard Lavuš	S2	9	3	4	9	9	-	0	37
21.	Alexander Ténai	S4	9	9	7	9	-	1	0	35
22. - 27.	Žaneta Semanišinová	S3	9	9	7	9	-	-	0	34
	Dorota Jarošová	S4	9	9	7	9	-	-	0	34
	Ádám Urbán	S2	9	7	9	9	-	-	0	34
	Tomáš Domes	S2	9	6	2	9	-	6	0	34
	Peter Onduš	S1	9	9	-	7	-	-	0	34
	Jozef Jagerský	S1	5	1	-	9	9	1	0	34
28. - 30.	Kristína Mišlanová	S3	9	9	6	9	-	-	0	33
	Laura Vištanová	S2	9	9	-	9	-	6	0	33
	Tímea Zvoláneková	S1	9	3	2	9	-	1	0	33
31. - 34.	Jana Sadovská	S1	5	1	7	9	-	1	0	32
	Michaela Dlugošová	S1	9	6	-	8	-	-	0	32
	Juraj Jursa	S1	9	3	2	9	-	-	0	32
	Kristína Bratková	S2	9	4	2	9	-	6	0	32
35. - 37.	Katarína Krajčiová	S4	9	4	-	9	9	-	0	31
	Natália Tóthová	S1	7	-	-	9	-	6	0	31
	Marek Biroš	S4	9	9	3	9	-	1	0	31
38. - 43.	Jakub Genči	S2	9	7	4	9	-	-	0	29
	Roman Staňo	S4	9	9	-	9	2	-	0	29
	Milan Kubala	S3	9	9	-	7	-	4	0	29
	Jakub Žoldák	S2	9	9	-	9	2	-	0	29
	Lenka Kopfová	Z9	9	2	-	9	-	-	0	29
	Ekaterina Volková	S3	9	9	-	7	2	2	0	29
44.	Michal Pándy	S2	9	4	9	6	-	-	0	28
45. - 50.	Jarmila Šimková	S1	9	-	-	9	-	-	0	27
	Jozef Šarišský	S1	8	1	-	9	-	-	0	27
	Martin Mičko	Z9	9	-	-	9	-	-	0	27
	Diana Hlaváčová	S3	9	9	-	9	-	-	0	27
	Ján Pavlech	S1	8	2	1	6	0	2	0	27
	Martin Šalagovič	None	9	-	-	9	-	-	0	27
51. - 54.	Martin Mihálik	Z9	9	-	-	8	-	-	0	26
	Dominik Krasula	S2	9	6	-	9	-	2	0	26
	Tobiáš Babej	S1	9	1	-	7	-	-	0	26
	Tomáš Kuzma	S3	9	2	-	9	-	6	0	26
55. - 57.	Zoltán Hanesz	S2	9	7	-	9	-	-	0	25
	Tomáš Terem	S3	9	3	3	9	-	1	0	25
	Filip Csonka	Z9	9	-	-	7	-	-	0	25
58. - 61.	Peter Kovács	S4	9	3	5	7	-	-	0	24
	Veronika Rišková	S2	8	3	2	7	2	-	0	24

P.	Meno a priezvisko	Kategória	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
	Ján Gerčák	S1	9	6	-	-	-	-	0	24
	Veronika Demčáková	S2	9	4	-	9	2	-	0	24
62. - 65.	Jozef Janovec	S4	9	4	-	9	-	-	0	22
	Matej Dujava	S4	6	7	-	9	-	-	0	22
	Radka Bušovská	S3	9	4	-	9	-	-	0	22
	Pavol Petruš	S2	9	4	-	9	-	-	0	22
66. - 68.	Marianna Pavlišinová	S2	9	3	-	7	2	-	0	21
	Pavol Mártonfi	S2	9	3	-	9	-	-	0	21
	Daniel Koľ	S2	9	2	2	8	-	-	0	21
69.	Šimon Vančo	S3	9	6	4	-	1	-	0	20
70.	Samuel Schneider	S3	9	3	-	7	-	-	0	19
71. - 74.	Anton Gromóczki	S4	9	-	-	9	-	-	0	18
	Jozef Tanzer	S1	9	-	-	-	-	-	0	18
	Zuzana Svobodová	S3	9	-	-	9	-	-	0	18
	Samuel Oswald	S2	9	-	-	9	-	-	0	18
75.	Ondřej Darmovzal	S4	9	8	-	-	-	-	0	17
76. - 77.	Veronika Schmidtová	S2	9	-	-	7	-	-	0	16
	Rajmund Hruška	S2	9	-	-	7	-	-	0	16
78.	Valentín Harničár	S2	9	2	-	-	-	-	0	11
79.	Samuel Chaba	Z9	5	-	-	-	-	-	0	10
80.	Ján Špak	S4	-	-	-	9	-	-	0	9
81.	Anna Čujová	S1	2	-	1	1	-	-	0	6
82.	Marek Koman	S1	-	-	-	0	-	-	0	0

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

Projekt podporila Nadácia pre deti Slovenska z fondu Hodina deťom

Názov STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2014 • Zimný semester 39. ročníka (2014/2015)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `http://www.strom.sk`
E-mail: `zdruzenie@strom.sk`