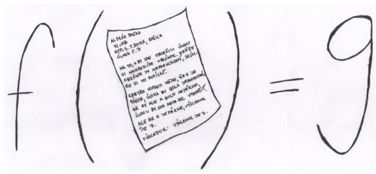
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Hurá!



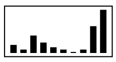
Po tom, čo ste vaše riešenia vhodili do nášho opravovacieho mlynčeka, sa k vám po zbehnutí časovo a pamäťovo náročných výpočtoch vracajú s priradeným počtom bodov z množiny od 0 po 9. Veríme, že čo najviac z nich sa zobrazilo do 9tky, a ak aj náhodou nie, tak vám snáď komentár na nich spoločne so vzorovými riešeniami, ktoré nájdete na ďalších stranách, dostatočne objasnia, prečo má vaše riešenie inú funkčnú hodnotu. Dúfame, že v ďalšej sérii sa priblížite k vytúženej konštantnej funkcii, ktorá bude od x-ovej osi najďalej, ako to v tomto obore hodnôt ide. Príjemnú zábavu vám želajú

vaši **STROM**isti

Košický Matboj

21.10.2016 prebehol už 16. ročník Košického Matboja. Tejto tradičnej tímovej súťaže, organizovanej pod taktovkou **STROM**u, sa tentokrát zúčastnilo až 54 tímov z celého Slovenska. V priestoroch Kultúrno-spoločenského centra na Jedlíkovej ulici si svoje vedomosti z matematiky zmeralo rekordných 215 súťažiacich. Najlepšie obstáli tímy z Gymnázia na Poštovej ulici v Košiciach a Gymnázia J.G. Tajovského v Banskej Bystrici, ktoré si tým zaistili pozvánku na zimné sústredenie **STROM**u. Kompletné poradie, ako aj zadania s výsledkami a fotogalériu nájdete na našej stránke. Všetkým zúčastnením ďakujeme a už sa tešíme na ďalší ročník.

1. **Opravovali: Kristín Mišlanová, Peťo Kovács**
Počet riešiteľov: 48



Dokážte, že ak je číslo n druhou mocninou prirodzeného čísla, potom je súčin posledných dvoch cifier dekadického zápisu čísla n párne číslo.

Riešenie:

Vieme, že platí $n = m^2$, kde m je prirodzené číslo.

Posledné dve cifry v čísle n nám ovplyvňujú iba posledné dve cifry čísla m, tie si označme $\overline{ba}$. Platí to, pretože ak si číslo m zapíšeme v tvare $a+10b+100c$, kde c je prirodzené číslo, tak po umocnení dostávame $a^2+20ab+100(b^2+100c^2+2ac+20bc)$. Vidíme, že jediné členy, ktoré po delení 100 môžu dať iný zvyšok ako 0, a teda ovplyvniť cifry na mieste desiatok a jednotiek, sú a^2+20ab.

V prípade, že m je párne číslo, tak je párnym číslom aj m^2, z čoho vyplýva, že posledná cifra čísla n je párna, a teda aj daný súčin posledných dvoch cifier čísla n bude určite párny.

V prípade, že m je nepárne číslo, tak sa pozrieme na výraz $20ab+a^2$. Vieme, že $20ab$ nám dá na miesto desiatok párne číslo a zároveň aj zvyšok pri prechode cez desiatku z a^2 je párne číslo. (Toto tvrdenie overíme jednoduchým vyskúšaním možnosti $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$.) To nám po sčítaní dáva párne číslo na mieste desiatok a zároveň zabezpečuje párnosť súčinu posledných dvoch cifier čísla n.

Komentár: Väčšina z vás prišla o body pri jednoduchých úvahách o násobení ako neuvedomenie si prechodu cez desiatku či zlé vyhodnotenie počtu cifier, ktoré ovplyvňujú posledné dve pozície vo výslednom čísle. Preto týmto, na prvý pohľad zjavným myšlienkam, skúste venovať viac času, pretože to určite neboli veci, na ktoré by ste nezvládli po dlhšom zamyslení aj sami prísť (:

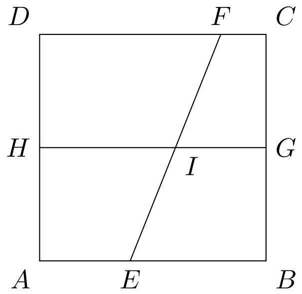
2. **Opravovali: Žanetka Semanišinová, Roman Staňo**
Počet riešiteľov: 35

Je daný štvorec a 9 priamok. Každá z týchto 9 priamok delí tento štvorec na štvoruholníky, ktorých pomer obsahov je 2 : 3. Dokážte, že aspoň 3 z týchto priamok sa pretínajú v jednom bode.

Riešenie:

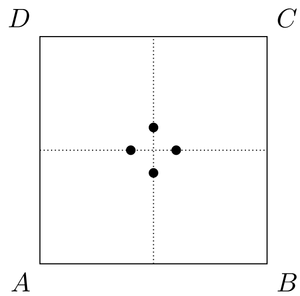
Na to, aby priamka delila štvorec na dva štvoruholníky, musí nutne prechádzať vnútornými bodmi protiľahlých strán štvorca (skúste si predstaviť rôzne možné polohy priamky a štvorca a zistíte, že v každom inom prípade dostanete dva trojuholníky alebo trojuholník a päťuholník). Pri spomínanom umiestnení priamky do štvorca nám vzniknú dva lichobežníky (vieme totiž to, že tri zo štyroch strán vzniknutého štvoruholníka ležia na troch rôznych stranách pôvodného štvorca, a teda nejaké dve sú rovnobežné).

Obsah lichobežníka vieme vypočítať ako $S = \frac{1}{2}(a + c)v$, kde a a c sú dĺžky jeho základní a v je ich vzdialenosť (výška lichobežníka). Člen $\frac{1}{2}(a + c)$ navyše nadobúda aj geometrický význam dĺžky strednej priečky lichobežníka (spojnice stredov ramien). Nech EF je ľubovoľná deliaca priamka, prechádzajúca cez strany (BUNV[1]) AB a CD. Nech H a G sú stredy strán AD a BC a bod I nech je prienik GH a EF (rozmyslite si, prečo takýto prienik vždy existuje). Úsečky GI a IH potom predstavujú stredné priečky. Pre pomer obsahov lichobežníkov potom dostávame (BUNV, nech $AEFD$ má väčší obsah):



$$\frac{S_{AEFD}}{S_{EBCF}} = \frac{|AD||HI|}{|BC||IG|} = \frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{|HI|}{|IG|} = \frac{3}{2}$$

pretože $|AD| = |BC|$. Nakoľko bod I leží na priamke GH, je jeho poloha jednoznačne daná (vďaka vzťahu, ktorý sme dostali z rovnice). Vieme teda, že všetky priamky, ktoré delia štvorec podľa zadania, prechádzajú cez bod I, ktorý sa nachádza v dvoch pätinách strednej priečky GH (samozrejme, vzhľadom na parametre určené v BUNV poznámkach). Rozriešením úlohy aj pre ostatné možnosti ($BCFE$ má väčší obsah a EF prechádza stranami BC a AD) získame spolu 4 body, symetricky rozmiestnené podľa obrázku:

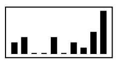


Každá priamka, ktorá delí štvorec v pomere podľa zadania, musí prechádzať cez práve jeden z týchto bodov. A keďže priamok je 9 a body 4, podľa Dirichletovho princípu určite existuje bod taký, že cez neho prechádzajú aspoň tri priamky, čo je to, čo sme chceli dokázať.

Komentár: Nech sa zdajú veci akokoľvek triviálne, pokiaľ majú pre riešenie zásadný význam, je dobré ich spomenúť. Mnoho riešiteľov zabudlo úvodnú zmienku o tom, že hľadané priamky musia prechádzať cez vnútorné body protiľahlých strán štvorca. Veľa riešiteľov ukázalo, že priamky prechádzajúce cez 4 body na obrázku delia štvorec v zadanom pomere. Zabudli však ukázať, že každá priamka s touto vlastnosťou prechádza cez jeden z bodov (opačná implikácia), za čo sme už museli sťahovať body.

3. Opravovali: Janka Baranová, Henka Micheľová

Počet riešiteľov: 23

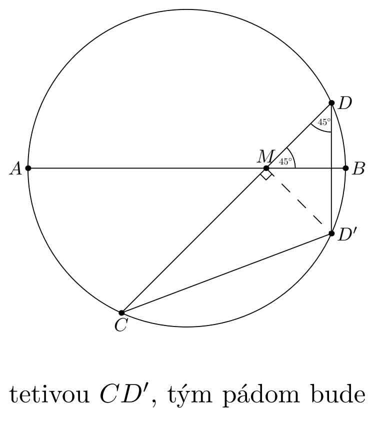


Bod M leží na priemere AB kružnice k. Tetiva CD prechádza bodom M a pretína AB pod uhlom 45°. Dokážte, že súčet $|CM|^2 + |DM|^2$ nezávisí od výberu bodu M.

Riešenie:

V prvom kroku si zobrazíme bod D v osovej súmernosti podľa osi AB. Obrazom bodu D bude bod D', ktorý bude ležať na kružnici. Nakoľko bod M leží na osi súmernosti, tak potom bude platiť $|MD| = |MD'|$ a zároveň $|\sphericalangle DMB| = |\sphericalangle D'MB| = 45°$.

V rovnoramennom trojuholníku DMD' platí, že $|\sphericalangle DMD'| = |\sphericalangle DMB| + |\sphericalangle BMD'| = 45° + 45° = 90°$. Trojuholník DMD' je pravouhlý a bude platiť, že aj uhol CMD' bude pravý (keďže s uhlom $D'MD$ tvorí priamy uhol), teda aj trojuholník CMD' bude pravouhlý.



Podľa Pytagorovej vety vieme následne vyjadriť: $|CM|^2 + |D'M|^2 = |CM|^2 + |DM|^2 = |CD'|^2$, teda sme výraz zo zadania prepísali pomocou druhej mocniny dĺžky strany CD'. Ostáva teda dokázať, že $|CD'|$ je konštantne veľká pre akýkoľvek výber bodu M.

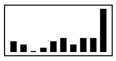
Uvažujme teda obvodový uhol nad tetivou CD'. Tento je rovný veľkosti uhla CDD'. My však vieme, že trojuholník DMD' je rovnoramenný a pravouhlý so základňou DD', a teda platí: $|\sphericalangle DD'M| = |\sphericalangle D'DM| = 45°$. Veľkosť nášho hľadaného uhla bude: $|\sphericalangle CDD'| = |\sphericalangle MDD'| = 45°$, čo je konštanta.

Polomer zadanej kružnice sa nám nemení a zároveň sa nám nemení ani obvodový uhol nad tetivou CD', tým pádom bude dĺžka tejto tetivy konštantná pre každý výber bodu M, čo sme chceli dokázať.

Komentár: Tí z vás, čo sa do tejto úlohy pustili, ju aj úspešne vyriešili. Chyby sa zväčša vyskytovali iba v nedostatočnom odôvodnení jednotlivých krokov, ktoré ste v riešeniach robili. Niektorí sa pustili cestou analytickej geometrie a úspešne ju dotiahli do konca, ale nezabúdajte, že ak sa chcete pustiť týmto smerom, tak je mimoriadne podstatné odôvodňovať každý jeden vzorec a dávať si pozor na správne úpravy výrazov.

[1] BUNV je zaužívaná skratka pre „bez ujmy na všeobecnosti“

4. Opravovali: Dano Onduš, Rišo Trembecký
Počet riešiteľov: 36



Pre ktoré reálne čísla c existujú práve dve rôzne reálne čísla, ktoré sú riešením rovnice $x^3 + (c-1)x + c = 0$?

Riešenie:

Najprv si ľavú stranu rovnice upravíme:

$$\begin{aligned} x^3 + (c-1)x + c &= 0 \\ x^3 - x + xc + c &= 0 \\ x \cdot (x^2 - 1) + (x+1) \cdot c &= 0 \\ x \cdot (x-1) \cdot (x+1) + (x+1) \cdot c &= 0 \\ (x+1) \cdot (x^2 - x + c) &= 0. \end{aligned}$$

Súčin dvoch čísel je nulový, ak aspoň jedno z nich je nulové. Preto je jedným riešením $x = -1$ bez ohľadu na parameter c.

My chceme práve dve riešenia pre náš zvolený parameter, a preto aj kvadratická rovnica $x^2 - x + c = 0$ musí mať nejaké riešenie. Jednou možnosťou je, že bude mať jeden dvojnásobný koreň rôzny od -1, a druhou je, že bude mať dva rôzne korene, pričom jeden z nich je rovný -1. Inak by sme dostali iba jeden alebo až tri rôzne korene spolu s $x = -1$.

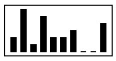
V prvej možnosti platí, že táto kvadratická rovnica musí mať nulový diskriminant. Teda $1 - 4c = 0$, z čoho $c = \frac{1}{4}$. Po dosadení hodnoty parametra dostávame naozaj jedno riešenie pre kvadratickú rovnicu, a to $x = \frac{1}{2}$, ktoré je rôzne od -1.

V druhej možnosti vieme, že jeden z koreňov rovnice je $x = -1$. Preto po dosadení musí platiť $(-1)^2 - (-1) + c = 0$, z čoho $c = -2$. Následne vieme dopočítať druhé riešenie tejto rovnice, ktoré je rovné dvom.

V obidvoch prípadoch sme našli dve riešenia pre náš parameter a zároveň vieme, že ak jedným riešením je $x = -1$, tak iné možnosti, ako môže mať naša rovnica práve dve riešenia, neexistujú, preto vyhovuje len $c = \frac{1}{4}$ a $c = -2$.

Komentár: Úloha bola pomerne jednoduchá, preto sa ju podarilo vyriešiť skoro každému, kto sa do nej pustil. Ak ste stratili body, bolo to najčastejšie spôsobené nejakou numerickou chybou, nedostatočným vysvetlením niektorých krokov, alebo ste zabudli na možnosť, kde kvadratická rovnica $x^2 - x + c = 0$ má dve riešenia, pričom jedno z nich je -1.

5. Opravoval: Maťo Vodička
Počet riešiteľov: 25



V pravidelnom n-uholníku je každá strana aj uhlopriečka zafarbená jednou z $n-1$ farieb. Vrchol sa nazýva dúhový, ak všetky strany a uhlopriečky, ktoré z neho vychádzajú, majú navzájom rôzne farby. Koľko najviac vrcholov môže byť dúhových?

Riešenie:

Keď si vyskúšame malé prípady (napr. 3,4,5,6), tak prídeme na to, že sa zdá, že ak je n párne, môžu byť dúhové všetky vrcholy. A ak je n nepárne, tak môžu byť dúhové všetky až na jeden. Toto je však len náš „tip“ a my to teraz musíme aj dokázať (alebo ak sme tipli zle, tak musíme zistiť, ako to je naozaj).

Keďže v tejto úlohe nie je žiaden rozdiel medzi uhlopriečkami a stranami, budem ich volať jedným slovom hrany. Teda hrana je strana alebo uhlopriečka. (Áno, tí z vás, ktorí vedia niečo o grafoch, vidia, že som si len požičal grafovú terminológiu.)

Začneme tým, že ukážeme, že ak je n nepárne, tak všetky vrcholy byť dúhové nemôžu. Predpokladajme (sporom), že môžu. Potom, ak si zoberieme jednu konkrétnu farbu (napr. ružovú), tak platí, že z každého vrchola vychádza práve jedna ružová hrana. Avšak to znamená, že ružové hrany majú spolu n koncov, čo je spor. To preto, lebo každá hrana má 2 konce (spája 2 vrcholy), a teda celkový počet koncov ružových hrán musí byť párny.

Teraz musíme ukázať, že naozaj vieme hrany zafarbiť tak, aby sme pre párne n dostali n dúhových a pre nepárne n len $n-1$ dúhových vrcholov. Začneme konštrukciou pre párne n. Zoberme na chvíľu jeden vrchol n-uholníka a dajme ho niekam preč. Označme tento vrchol V. Ostatné vrcholy preskupíme do pravidelného $(n-1)$-uholníka. Teraz uvediem dva rôzne prístupy. Jeden bude nakreslím-vidím :) a druhý bude trocha využívať nejakú algebru.

Začneme prvým prístupom. Zoberieme si jednu stranu $(n-1)$-uholníka a jednou farbou zafarbíme všetky uhlopriečky, ktoré sú s ňou rovnobežné. Ostal práve jeden vrchol (oproti strane, ktorú sme zvolili), a ten spojíme s tým vrcholom V. A toto spravíme pre každú stranu, pri čom vždy, samozrejme, použijeme novú farbu. Ľahko vidno, že použijeme naozaj $n-1$ farieb a zo žiadneho vrchola nevychádzajú 2 hrany jednej farby. A na druhú stranu každá hrana je zafarbená, lebo každá uhlopriečka v pravidelnom $(n-1)$-uholníku je rovnobežná s nejakou stranou a každý vrchol je presne oproti nejakej strane. Preto budú naozaj všetky vrcholy dúhové.

Druhý prístup spočíva v tom, že označíme vrcholy $(n-1)$-uholníka číslami $0, 1, \ldots, n-2$ a farby označíme tiež $0, 1, \ldots, n-2$. A teraz farbou i zafarbíme také dvojice vrcholov a, b, že platí $a + b \equiv i \pmod{n-1}$. A ešte farbou i zafarbíme hranu medzi V a vrcholom k takým, že platí $2k \equiv i \pmod{n-1}$. Znova sú všetky dvojice vrcholov spojené, a zo žiadneho vrchola nevychádzajú dve hrany rovnakej farby. Keby totiž (a, b) a (a, c) mali rovnakú farbu, tak by muselo platiť, že $b \equiv c \pmod{n-1}$, teda $b = c$. Analogicky pre prípad, hrany do vrchola V. Môžete si však rozmyslieť, že oba prístupy zafarbili hrany úplne rovnako :).

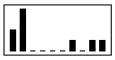
A na záver ešte musíme uviesť konštrukciu pre nepárne n. No tá je veľmi ľahká. Lebo ak je n nepárne, tak $n-1$ je párne. A nie je nič ľahšie, ako zafarbiť hrany medzi $(n-1)$ vrcholmi tak, ako sme to spravili pre $(n-1)$-uholník. A nakoniec posledný vrchol spojíme so všetkými vrcholmi tou poslednou farbou, ktorú sme ešte nepoužili. Potom tých $n-1$ vrcholov bude dúhových.

Áno, ak ste veľmi dotieraví, tak ste si všimli jeden drobný nedostatok, a to ten, že ak $n = 3$, tak $n-1 = 2$. A „dvojuholník“ sme predsa nevyriešili. Ale môžeme si uvedomiť, že konštrukcia funguje aj pre „dvojuholník“ alebo to proste pre trojuholník spravíme zvlášť. Na takéto detaily však netreba zabúdať.

Záver je ten, že pre párne n môže byť maximálne n dúhových vrcholov a pre nepárne n len $n-1$.

Komentár: Na plný počet bodov vyriešili úlohu len štyria z vás, ktorým týmto gratulujem. Najčastejšia chyba, ktorej ste sa dopúšťali, bola v tom, že ste neuvádzali, ako hrany zafarbiť, aby sme dostali n dúhových vrcholov. Buď ste to ani len neriešili, alebo ste prehlásili, že to sa proste spraví ľahko. V skutočnosti tá konštrukcia zodpovedá tomu, že ak máme na bridžovom (šachovom) turnaji $2n$ párov (hráčov), tak môžu odohrať $2n-1$ kôl tak, aby hrali každý z každým (niečo, čo bridžisti (šachisti) už možno dávno vedia :P). Napriek tomu ten systém, ako hrať, musel niekto niekedy vymyslieť, nemôžu hrať proste náhodne a dúfať, že to vyjde. Preto bolo potrebné tú konštrukciu naozaj uviesť (ako vo vzoráku). Nabudúce si dávajte pozor, či naozaj to, čo prehlásite, že je zrejmé, je naozaj zrejmé.

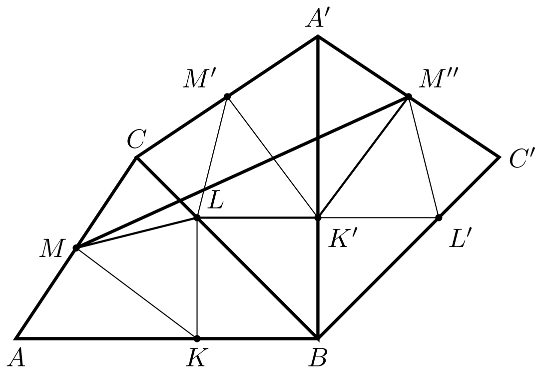
6. **Opravoval: Matúš Hlaváčik**
Počet riešiteľov: 9



Do daného ostrouhlého trojuholníka ABC vpíšte trojuholník KLM tak, aby jeho obvod bol najmenší možný.

Riešenie: *(podľa S. Krajčiho)*

Pre začiatok zvolíme na strane AC ľubovoľný bod M. Teraz trojuholník preklopíme osovou symetriou podľa BC a následne vzniknutý trojuholník preklopíme ešte podľa BA'.



Uvedomme si, čo hľadáme. Hľadáme trojuholník KLM s čo najmenším obvodom, teda hľadáme najkratšiu cestu z bodu M do nejakého bodu na strane BC (bod L), potom do bodu na strane AB (bod K) a potom naspäť do bodu M.

Keďže sme trojuholník iba preklápali podľa osi, tak vieme, že obvod trojuholníka KLM je $|ML| + |LK| + |KM| = |ML| + |LK'| + |K'M''|$. Pre zvolený bod M má bod M'' pevne danú polohu, a teda dĺžka najkratšej cesty z M do M'' bude vždy úsečka spájajúca tieto dva body. Túto úsečku si potom spätne vieme preklopiť späť do pôvodného trojuholníka, a tak dostaneme trojuholník KLM vpísaný do ABC taký, že tento trojuholník KLM má najmenší možný obvod pre zvolený bod M.

Teraz vieme ako nájsť trojuholník KLM s minimálnym obsahom pre zvolené M. Otázka teraz znie, pre ktorý bod M na strane AC bude mať trojuholník najmenší obvod.

Pozrime sa na trojuholník MBM''. Vieme, že $|BM| = |BM''|$, to znamená, že trojuholník je rovnoramenný. Vypočítame veľkosť uhla MBM'':

$$\begin{aligned} |\sphericalangle MBM''| &= |\sphericalangle MBC| + |\sphericalangle CBA'| + |\sphericalangle A'BM''| \\ &= |\sphericalangle MBC| + |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ABM| \\ &= 2 \cdot |\sphericalangle ABC| \end{aligned}$$

Vidíme, že $|\sphericalangle MBM''|$ je pre daný trojuholník konštanta, a teda všetky trojuholníky MBM'' sú podobné podľa vety (s, u, s). To znamená, že keď chceme minimalizovať $|MM''|$, tak nám stačí minimalizovať $|BM|$. Najbližším bodom strany AC k vrcholu B je v ostrouhlom trojuholníku päta výšky na stranu AC. To znamená, že obvod trojuholníka KLM bude minimálny, ak M bude päta výšky z vrcholu B.

Tento postup vieme jednoducho aplikovať aj na zvyšné dva body (K a L) a pre oba taktiež dostaneme, že musia byť pätami výšok. Výsledný trojuholník KLM je teda tvorený pätami výšok trojuholníka ABC.

Komentár: Túto úlohu odovzdalo len 9 z vás, čo je škoda. Väčšina z týchto riešení však len tipovala výsledok a nemala žiaden korektný postup. Všetci, čo dostali aspoň 6 bodov, sú úspešní riešitelia tejto úlohy, aj keď tam poniektorí mali nejaké chybičky. Tento príklad sa dal riešiť viacerými spôsobmi, ale na vzorové riešenie som si zvolil to najkrajšie z množiny tých, ktoré som poznal a ktoré prišli.

Poradie po 1. sérii Letného semestra 40. ročníka

P.	Meno a priezvisko	Kat.	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1.	Samuel Krajči	S1	GAlejKE	9	9	9	-	9	9	0	54
2. - 3.	Matej Hanus	S1	GPostKE	9	9	9	9	6	1	0	51
	Martin Melicher	S2	GPostKE	9	9	8	6	9	8	0	51
4.	Martin Števko	S2	GAlejKE	9	9	9	8	6	6	0	47
5.	Branislav Pastula	S1	GPostKE	9	9	9	9	-	-	0	45
6.	Viktória Brezinová	S2	GAlejKE	2	9	9	9	9	-	0	40
7.	Jakub Pravda	S1	ŠpMNDaG	9	4	7	7	1	-	0	37
8. - 9.	Patrik Paľovčík	S1	GPostKE	8	6	-	8	6	-	0	36
	Miroslav Macko	S1	ŠpMNDaG	9	9	-	9	-	-	0	36
10. - 11.	Michal Masrna	S1	GPostKE	8	9	-	9	-	-	0	35
	Samuel Novák	S1	GPostKE	8	4	4	9	1	-	0	35
12. - 13.	Jakub Mach	S4	GPostKE	9	9	8	7	-	-	0	33
	Norbert Micheľ	Z9	ZKro4KE	5	4	6	-	9	-	0	33
14. - 15.	Martin Spišák	S1	GAlejKE	9	-	9	9	4	-	0	31
	Róbert Sabovčík	S1	GPostKE	4	9	-	9	-	-	0	31
16.	Tomáš Chovančák	S1	ZKro4KE	9	5	-	7	-	-	0	30
17. - 18.	Matej Tarča	S1	GPostKE	9	-	-	9	-	-	0	27
	Katarína Demčáková	S1	GPostKE	9	-	-	9	-	-	0	27
19. - 21.	Martin Mihálik	S2	GAlejKE	8	9	9	-	-	-	0	26
	Martin Albert Gbúr	S1	GPostKE	8	5	-	5	-	-	0	26
	Jakub Pohly	S3	GPostKE	9	9	-	8	-	-	0	26
22.	Dominik Kopčak	S2	GPostKE	8	-	8	9	-	-	0	25
23. - 24.	Martin Masrna	S3	GPostKE	2	7	-	9	5	1	0	24
	Benjamín Mravec	S1	GPostKE	4	2	-	9	-	-	0	24
25.	Marek Koman	S3	GAlejKE	8	1	8	6	-	-	0	23
26.	Andrea Faguľová	S1	GPostKE	8	-	-	5	-	-	0	21
27.	Radovan Lascsák	S1	GPostKE	3	3	0	5	3	0	0	19
28. - 30.	Kristína Bratková	S4	EGJAK	9	2	4	-	3	-	0	18
	Vratislav Madáč	S2	GAlejKE	9	5	-	-	4	-	0	18
	Michaela Bobeničová	S2	GPostKE	2	4	9	-	3	-	0	18
31.	Jakub Genči	S4	GPostKE	9	8	-	-	-	-	0	17
32.	Zoltán Hanesz	S3	GPostKE	8	-	-	7	-	-	0	15
33. - 35.	Erik Berta	S2	GAlejKE	-	9	-	-	5	-	0	14
	Timea Szöllősová	S1	GAMČA	7	-	-	-	-	-	0	14
	Kristína Galikova	S2	ŠpMNDaG	0	1	6	5	2	-	0	14
36.	Lujza Milotová	Z9	ZBrusKE	2	3	-	4	-	-	0	13
37. - 38.	Ondrej Tomášik	S1	GJgtBB	2	1	4	0	0	1	0	12
	Juraj Vlašič	S1	GAEinBA	-	3	-	4	1	-	0	12
39. - 40.	Andrej Pankuch	Z9	GAlejKE	-	4	-	-	3	-	0	11
	Roman Rumiantsev	S1	GAEinBA	3	-	-	8	-	-	0	11
41. - 43.	Juraj Mičko	S4	GPostKE	9	-	-	-	-	-	0	9
	Michaela Dlugošová	S3	GKukuPO	8	1	-	-	-	-	0	9
	Martin Mičko	S2	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	9
44. - 45.	Filip Csonka	S2	GAlejKE	8	-	-	-	-	-	0	8
	Dávid Šatala	S2	GPostKE	3	-	1	1	1	1	0	8
46.	Andrea Kirnágová	S1	GĽŠ26MI	1	-	0	-	3	-	0	7
47.	Jonáš Suvák	S1	GJarPO	2	1	1	-	1	0	0	5
48. - 50.	Samuel Chaba	S2	GAlejKE	3	-	-	-	1	-	0	4
	Adam Dragula	S2	GPostKE	0	-	-	4	0	-	0	4
	Jakub Murin	S1	GJgtBB	2	-	-	-	-	-	0	4
51.	Michal Barna	S2	ŠpMNDaG	-	-	-	3	-	-	0	3
52. - 53.	Michaela Borošová	S2	GPostKE	-	-	-	1	-	-	0	1
	Samuel Amrich	S2	GPostKE	-	0	1	0	-	-	0	1
54.	Ján Bartoš	S3	GŠko21VK	0	-	-	0	-	-	0	0

Zadania úloh zimného semestra 41. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `https://seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odoslania riešení: **21. 11. 2016**

1. Dokážte, že v každom konvexnom päťuholníku vieme vybrať 3 uhlopriečky tak, že ich poprekladaním je možné zostrojiť trojuholník.

2. Nech F_n je n-té Fibonacciho číslo. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel $(a,\ n)$ také, že $F_n + F_{2n} + F_{3n} = a! + 3$.

3. Do tabuľky 4×4 sú vpísané kladné reálne čísla tak, že súčin v každej pätici tvaru T je rovný 1. Zistite maximálny počet rôznych čísel zapísaných v tabuľke.

4. Je daný pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Na jeho odvesnách BC a AC sú postupne zvolené také body K a L, že $|CK| = 2 \cdot |BK|$ a $|AL| = 2 \cdot |CL|$. Nech D je päta výšky z vrcholu C trojuholníka ABC. Dokážte, že body $K,\ C,\ L$ a D ležia na jednej kružnici.

5. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla x a y platí nerovnosť

$$x + y \geq \sqrt{xy} + \sqrt{\frac{(x^2 + y^2)}{2}}.$$

6. Nech $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ sú nezáporné reálne čísla, ktorých súčet je 1. Dokážte, že existujú čísla $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, z ktorých každé je rovné 0, 1, 2, 3, alebo 4 také, že

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \neq (2,\ 2,\ \ldots,\ 2) \qquad \text{a} \qquad 2 \leq a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq 2 + \frac{2}{3^n - 1}.$$

Za podporu a spoluprácu ďakujeme

Názov STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • Október 2016 • Zimný semester 41. ročníka (2016/2017)
Internet: `http://seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`

Vydáva: Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
Internet: `https://zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`