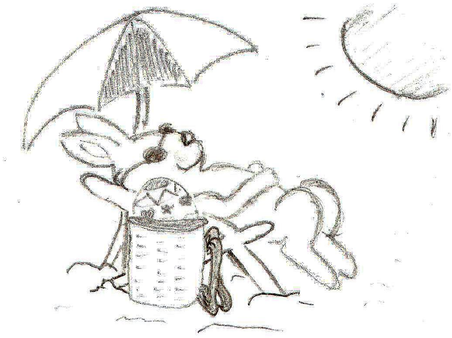
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

# Vitajte!



Ako ste si iste aspoň pred mesiacom všimli, blížia sa Vianoce. Okrem Vianoc sa blíži aj kopa ďalších vecí, ako napríklad Veľká Noc, letné prázdniny či ďalšie Vianoce. Skôr, ako všetky z týchto vecí, sa k vám dostal nový časopis, opravené riešenie a občas aj nejaké body. Tých najlepších z vás čaká ako odmena super sústredenie a tých zvyšných aspoň Vianoce. Veselé Vianoce a šťastný Nový rok aj nový rok vám želajú

vaši **STROM**isti

# Maxiklub

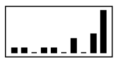
No čo decká, poslúchali ste? Mikuláš bol štedrý? Veď sme si aj mysleli. Ak by vám bolo smutno, že už sa nemáte na čo tešiť, tak nezúfajte, lebo Maxiklub sa už blíži! Stretneme sa 23.12.2016 medzi 13.00 a 17.00 v miestnosti SJSP19 na PF UPJŠ, Jesenná 5, Košice. Tak príďte a užite si predvianočné poobedie v spoločnosti vašich milovaných **STROM**istov.

# Sústredenie

Vaše snaženie počas predchádzajúcich 3 mesiacov a na Matboji sa konečne zúročilo a pre najlepších z vás je tu zaslúžená odmena v podobe sústredenia. Sústredenie sa bude konať 12.2.2017 - 17.2.2017 v CŠvP Bárka v Juskovej Voli. Už sa na vás tešia vaši obľúbení vedúci s kopou úžasného programu. Nezabudnite čo najskôr vyplniť prihlášku, ktorú čoskoro nájdete na našej webovej stránke a nedočkavo hľadieť do kalendára. Bližšie informácie nájdete v pozvánke. Prihlášku vyplňte najneskôr 13.1.2017.

## 1.

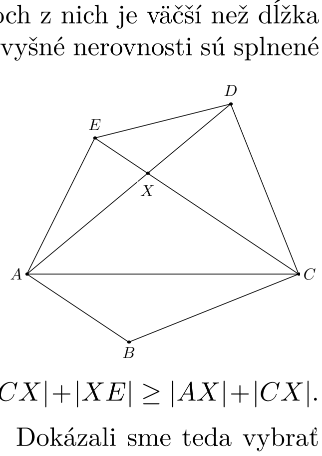
**Opravovali: Kristín Mišlanová, Žanetka Semanišinová**
Počet riešiteľov: 20



Dokážte, že v každom konvexnom päťuholníku vieme vybrať 3 uhlopriečky tak, že ich poprekladaním je možné zostrojiť trojuholník.

**Riešenie:**

Najprv si musíme uvedomiť, čo znamená, že je z troch úsečiek možné zložiť trojuholník. Nutná a zároveň postačujúca podmienka pre to je, že spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť (teda, že súčet dĺžok ľubovoľných dvoch z nich je väčší než dĺžka tretej). Navyše, pokiaľ platí, že súčet dĺžok dvoch kratších úsečiek je väčší než dĺžka najdlhšej, zvyšné nerovnosti sú splnené triviálne. Stačí teda vybrať uhlopriečky, ktoré túto nerovnosť spĺňajú.



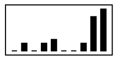

Vyberme najdlhšiu uhlopriečku (pokiaľ ich je viac rovnako dlhých, vyberieme ľubovoľnú z nich) v danom päťuholníku (označme ho $ABCDE$) . Bez ujmy na všeobecnosti, nech je to $AC$. V päťuholníku vedú do každého vrcholu 2 uhlopriečky. Ako ďalšie si teda vieme vybrať uhlopriečky $AD$ a $CE$, ktoré majú s $AC$ spoločný bod.

Ukážeme, že uhlopriečky $AC$, $AD$ a $CE$ spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť (keďže $AC$ je najdlhšia uhlopriečka, stačí nám ukázať, že $|AD| + |CE| > |AC|$). Keďže $ABCDE$ je konvexný, uhlopriečky $AD$ a $CE$ sa pretínajú (ich priesečník označme $X$). Existuje teda trojuholník $ACX$, v ktorom je splnená trojuholníková nerovnosť $|AX| + |CX| > |AC|$. Keďže vzdialenosti sú nezáporné čísla, tak je splnená aj nerovnosť $|AD|+|CE| = |AX|+|XD|+|CX|+|XE| \geq |AX|+|CX|$.

Z týchto dvoch nerovností plynie dokazovaná trojuholníková nerovnosť: $|AD| + |CE| > |AC|$. Dokázali sme teda vybrať trojicu uhlopriečok, ktorá spĺňa podmienky pre to, aby ich poprekladaním bolo možné zostrojiť trojuholník, čím je tvrdenie zo zadania dokázané.

*Komentár:* Úloha nebola ťažká, no o to lepšia je to príležitosť, dať si záležať na tom, ako bude vaše riešenie vyzerať. To znamená, položiť si nasledovné otázky: Naozaj som napísal do úlohy, čo považujem za kritérium, že sa taký trojuholník dá zostrojiť? Je jasné, z ktorých uhlopriečok sa ho snažím zostrojiť? Je jasné, prečo majú moje uhlopriečky vlastnosti, ktoré im prisudzujem? Platí vo všeobecnosti, že veci vyzerajú ako na mojom obrázku? Naozaj neviem vlastnosti použité v riešení použiť jednoduchšie? Po zodpovedaní týchto otázok a správnou reakciou na odpovede sa nabudúce každému z vás môže podariť mať v takejto úlohe 9 bodov :)

## 2. **Opravoval: Roman Staňo**
Počet riešiteľov: 30



Nech $F_n$ je $n$-té Fibonacciho číslo. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel $(a,\ n)$ také, že $F_n + F_{2n} + F_{3n} = a! + 3$.

**Riešenie:**

Všimnime si, že každé Fibonacciho číslo tvaru $F_{3k}$ pre $k \in \mathbb{N}$ je párne. Toto tvrdenie dokážeme matematickou indukciou:

1. Nech $k = 1$: $F_3 = 2$, čo je párne.
2. Nech $F_{3k}$ je párne. Potom $F_{3(k+1)} = F_{3k+3} = F_{3k+2} + F_{3k+1} = F_{3k+1} + F_{3k} + F_{3k+1} = 2F_{3k+1} + F_{3k}$. Pričom prvý člen súčtu je párny (je to dvojnásobok prirodzeného čísla) a druhý člen je párny z indukčného predpokladu.

Analogicky vieme ukázať, že každé Fibonacciho číslo tvaru $F_{3k+1}$ alebo $F_{3k+2}$ pre $k \in \mathbb{N}$ je nepárne (nechávame na čitateľa :)). S týmto poznatkom ukážeme, že ľavá strana rovnice je vždy párna:

1. Vezmime $n = 3m$ pre nejaké $m \in \mathbb{N}$. Ľavú stranu riešenej rovnice potom vieme napísať ako: $F_{3m} + F_{3\cdot 2m} + F_{3\cdot 3m}$, čo je súčet troch párnych čísel a je teda tiež párne číslo.
2. Vezmime $n = 3m + 1$ pre nejaké $m \in \mathbb{N}$. Ľavú stranu riešenej rovnice potom vieme napísať ako: $F_{3m+1} + F_{3\cdot 2m+2} + F_{3\cdot(3m+3)}$, čo je súčet dvoch nepárnych čísel a jednoho párneho čísla a je teda tiež párne číslo.
3. Vezmime $n = 3m+2$ pre nejaké $m \in \mathbb{N}$. Ľavú stranu riešenej rovnice potom vieme napísať ako: $F_{3m+2} + F_{3\cdot(2m+1)+1} + F_{3\cdot(3m+2)}$, čo je súčet dvoch nepárnych čísel a jednoho párneho čísla a je teda tiež párne číslo.

Predpokladajme, že rovnica má riešenie. Potom aj pravá strana musí byť párna (inak by sa strany rovnice nerovnali) a teda člen $a!$ musí byť nepárny. Pre $a \geq 2$ však člen $a!$ obsahuje v súčine číslo a 2 a je teda párny. Pre $a$ nám preto ostáva len jedna možnosť: $a = 1$, teda $a! = 1$ a preto hľadáme také Fibonacciho čísla, že $F_n + F_{2n} + F_{3n} = 4$. Vyskúšaním $n = 1$ dostávame pre $(a, n)$ riešenie $(1, 1)$. Vieme, že Fibonacciho postupnosť je od druhého člena rastúca a teda pre $n \geq 2$ bude ľavá strana väčšia ako 4 a nevedie k žiadnemu ďalšiemu riešeniu.

*Komentár:* Posledná veta vo vzorovom riešení bolo to, za čo najviac padali body (samozrejme, ak tam chýbala :)). Takmer všetci riešitelia postupovali tak, že ukázali, že súčet Fibonacciho čísel je párny. Problém nastal až v riešení rovnice, kde už máme na pravej strane 4. Výsledok nestačilo len uhádnuť a prehlásiť, že to je všetko. Bolo nutné ukázať aj to, že žiadna iná trojica čísel nevyhovuje.

## 3. **Opravovali: Dano Onduš, Peťo Kovács**
Počet riešiteľov: 16

Do tabuľky $4 \times 4$ sú vpísané kladné reálne čísla tak, že súčin v každej pätici tvaru $T$ je rovný 1. Zistite maximálny počet rôznych čísel zapísaných v tabuľke.

**Riešenie:**

Najprv si čísla v tabuľke označíme $a$ až $p$ a postupne budeme zisťovať, ktoré čísla sa musia rovnať.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a** | ***b*** | **c** | d |
| e | ***f*** | g | h |
| *i* | ***j*** | *k* | l |
| m | n | o | p |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a** | b | *c* | d |
| ***e*** | ***f*** | ***g*** | h |
| **i** | j | *k* | l |
| m | n | o | p |

Pozrime sa na štvorec $3 \times 3$ v ľavom hornom rohu. Platí, že $abcfj = 1$ a zároveň $ikbfj = 1$. Z toho vyplýva $ac = ik$. Ďalej $aiefg = 1$ a $ckefg = 1$ , z čoho $ai = ck$. Preto $\frac{aci}{k} = i^2$ a $\frac{aci}{k} = c^2$. Keďže všetky čísla sú nenulové a kladné, tak platí $i = c$. Tiež platí $\frac{aik}{c} = a^2$ a $\frac{aik}{c} = k^2$ , z čoho $a = k$. Tento postup aplikujeme na všetky štyri štvorce $3 \times 3$ v tabuľke. Nová tabuľka bude vyzerať takto:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a** | **b** | **c** | d |
| e | **f** | g | *h* |
| c | ***d*** | *a* | *b* |
| g | h | e | *f* |

Teraz sa pozrime na päticu $abcfd$ v ľavom hornom rohu a $abhfd$ v pravom dolnom rohu. Keďže majú rovnaký súčin a líšia sa iba v jednom písmene, tak $c = h$. Otočením štvorca o 90° doľava máme pätice $dhbgf$ a $dhegf$, z čoho $b = e$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***a*** | **b** | **c** | d |
| *b* | ***f*** | *g* | c |
| *c* | **d** | a | b |
| g | c | b | f |

V ľavom hornom rohu novej tabuľky máme pätice $abcfd$ a $abcfg$ , z čoho $d = g$ a podobne z pravého horného rohu dostávame $f = a$. Potom z pätice $abcad$ v ľavom hornom rohu a $dbcad$ v pravom hornom rohu dostaneme $a = d$ , čím sme zredukovali počet rôznych čísel na tri.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | c | a |
| b | a | a | c |
| c | a | a | b |
| a | c | b | a |

Teraz sa v každej pätici tvaru $T$ nachádzajú 3 $a$, 1 $b$ a 1 $c$. Ostáva už iba nájsť vyhovujúce riešenie. Nech $a = 42$, $b = \frac{1}{42}$ a $c = \frac{1}{42^2}$, tak súčin v každej pätici tvaru $T$ je $42^3 \cdot \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{42^2} = 1$. Preto platí, že v tabuľke môžu byť najviac 3 rôzne čísla.

*Komentár:* Najpriamočiarejším riešením tejto úlohy bolo postupne zistiť, ktoré pozície obsahujú rovnaké čísla. Mnohí z vás však vynechali niektoré kroky alebo sa odkazovali na symetriu danej tabuľky, ktorá vôbec nie je dostatočne zjavná. Tiež neplatí, že na niektorých miestach v tabuľke musia byť jednotky, ako vidno zo vzoráku, číslo 42 funguje ešte lepšie.

## 4. Opravoval: Maťo Vodička

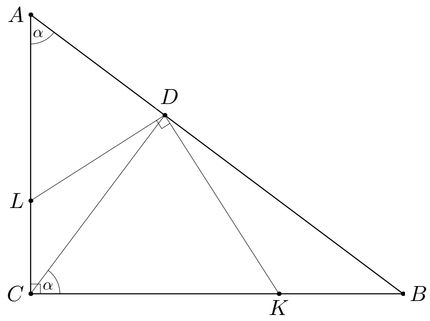
Počet riešiteľov: 24

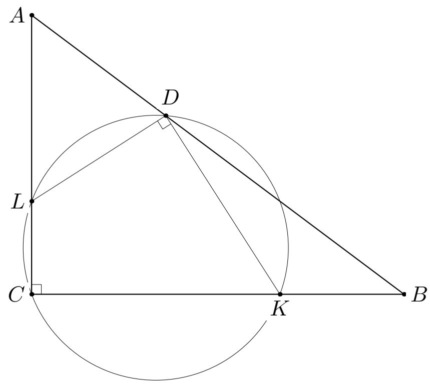
Je daný pravouhlý trojuholník $ABC$ s preponou $AB$. Na jeho odvesnách $BC$ a $AC$ sú postupne zvolené také body $K$ a $L$, že $|CK| = 2 \cdot |BK|$ a $|AL| = 2 \cdot |CL|$. Nech $D$ je päta výšky z vrcholu $C$ trojuholníka $ABC$. Dokážte, že body $K$, $C$, $L$ a $D$ ležia na jednej kružnici.

**Riešenie:**

Všimnime si, že $|\sphericalangle KCL| = 90°$, a preto body $K$, $C$, $L$ ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom $KL$. My chceme, aby na tejto kružnici ležal aj bod $D$, a preto nám stačí ukázať, že $|\sphericalangle KDL| = 90°$.

Ak označíme $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, tak zrejme $|\sphericalangle ACD| = 90° - \alpha$, z čoho máme $|\sphericalangle BCD| = \alpha$. Preto sú trojuholníky $ADC$ a $CDB$ podobné podľa vety *uu*. Pre ich pomery strán platí $|BC| : |CD| = |CA| : |AD|$. Keďže $|KC| = \frac{2}{3}|BC|$, a $|LA| = \frac{2}{3}|CA|$, tak platí aj $|KC| : |CD| = |LA| : |AD|$. Potom sú ale aj trojuholníky $KCD$ a $LAD$ podobné podľa vety *sus*.




Teraz už je ľahké ukázať, čo chceme. Totiž z tej podobnosti máme $|\sphericalangle LDA| = |\sphericalangle KDC|$, a preto $90° = |\sphericalangle CDL| + |\sphericalangle LDA| = |\sphericalangle CDL| + |\sphericalangle KDC| = |\sphericalangle KDL|$. Z toho vyplýva, že body $K$, $C$, $L$, $D$ naozaj ležia na jednej kružnici.

*Komentár:* Úlohu väčšina z vás vyriešila správne. Aby som tu však napísal aj niečo iné okrem toho, že akí ste šikovní, tak upozorním na nejaké chyby, ktoré sa vyskytli: Treba si dávať pozor na to, že všetko čo tvrdíte musí byť buď fakt zrejmé, alebo to treba dokázať. A tiež si dávajte pozor, aby ste pri dokazovaní toho, čo chcete dokázať, nepoužili to, čo chcete dokázať. Pretože potom v skutočnosti nič nedokážete :)

## 5. Opravoval: Rišo Trembecký

Počet riešiteľov: 35

Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla $x$ a $y$ platí nerovnosť

$$x + y \geq \sqrt{xy} + \sqrt{\frac{(x^2 + y^2)}{2}}.$$

**Riešenie:**

Nerovnosť môžeme umocniť na druhú, ak sú obe jej strany nezáporné. Na ľavej strane máme súčet kladných čísel (zo zadania), teda kladné číslo, na pravej máme súčet nezáporných odmocnín (z definície odmocniny), teda nezáporné číslo. Umocníme na druhú.

$$\begin{aligned}
x^2+2xy+y^2 &\geq xy+2\sqrt{xy\frac{(x^2+y^2)}{2}}+\frac{(x^2+y^2)}{2} && \Big/ -xy-\frac{(x^2+y^2)}{2}\\
\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2} &\geq 2\sqrt{xy\frac{(x^2+y^2)}{2}} && / \cdot 2\\
x^2+2xy+y^2 &\geq 4\sqrt{xy\frac{(x^2+y^2)}{2}}\\
(x+y)^2 &\geq 4\sqrt{xy\frac{(x^2+y^2)}{2}}
\end{aligned}$$

Aby sme sa zbavili odmocniny v nerovnosti už nadobro, potrebujeme strany znovu umocniť na druhú. Na ľavej strane je tentokrát vždy nezáporná druhá mocnina, na pravej nezáporná odmocnina prenásobená kladným číslom. Strany sú nezáporné, tak umocníme.

$$\begin{aligned}
(x+y)^4 &\geq 16xy\frac{(x^2+y^2)}{2}\\
x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 &\geq 8x^3y+8xy^3 && / -8x^3y+8xy^3\\
x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4 &\geq 0\\
(x-y)^4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Keďže párne mocniny (druhá, štvrtá, ...) sú vždy nezáporné čísla, tu sme s dôkazom skončili. Použili sme ekvivalentné úpravy nerovnosti, preto sa vieme z tohto vždy platného tvaru dostať naspäť k pôvodnému. Spätné odmocnenie strán nerovnosti pre nás nepredstavuje problém, pretože vieme, že vždy vyberáme tú kladnú/nezápornú odmocninu.

**Iné riešenie:**

Vráťme sa ešte na chvíľu a skúsme to upraviť len trošku inak. Oprášime znalosti nerovností KAGH priemerov.

$$\begin{aligned}
x^2+2xy+y^2 &\geq xy+2\sqrt{xy\frac{(x^2+y^2)}{2}}+\frac{(x^2+y^2)}{2} && \Big/ -xy-\frac{(x^2+y^2)}{2}\\
xy+\frac{(x^2+y^2)}{2} &\geq 2\sqrt{xy\frac{(x^2+y^2)}{2}} && / : 2\\
\frac{xy+\frac{(x^2+y^2)}{2}}{2} &\geq \sqrt{xy\frac{(x^2+y^2)}{2}}
\end{aligned}$$

No, toto je AG nerovnosť pre členy $xy$ a $\frac{(x^2+y^2)}{2}$.

*Komentár:* Keď ste úlohu vyriešili, určite ste si pomysleli, že tam nie je na spisovaní čo pokaziť a získate easy 9 bodov. Nuž, Rišo vám to tentokrát nedaroval a ak ste ho nepresvedčili, že viete, prečo môžete umocňovať, o pár bodov ste prišli. Takisto ste niektorí (z Rišovi neznámych príčin) pred umocňovaním najprv odčítali $\sqrt{xy}$, čím ste zničili jednoznačnosť nezápornosti ľavej strany nerovnosti a vôbec vám to extra nepomohlo pri riešení. Tí, ktorí získali 9 bodov a mali riešenie len na pár riadkov (asi cez priemery), majú od Riša palec hore. Ok, stačí tretej osoby. Prajem pekné sviatky :)

## 6. Opravoval: Matúš Hlaváčik

Počet riešiteľov: 2

Nech $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ sú nezáporné reálne čísla, ktorých súčet je 1. Dokážte, že existujú čísla $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, z ktorých každé je rovné 0, 1, 2, 3, alebo 4 také, že

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \neq (2,\ 2,\ \ldots,\ 2) \qquad \text{a} \qquad 2 \leq a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n \leq 2+\frac{2}{3^n-1}.$$

**Riešenie:**

Na začiatku si všimnime, že v zadaní je mnoho dvoják a z pravej aj ľavej strany nerovnosti by išlo jednoducho odčítať 2. To samozrejme vieme urobiť aj so strednou časťou a to tak, že každá z $a_1,\ \ldots, a_n$ bude z množiny $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$. Inak povedané, od každého argumentu odrátame 2. Prečo to platí vidíme tu:

$$\begin{aligned}
a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n-2 &= a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n-2\\
a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n-2 &= a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n-2(x_1+x_2+\ldots+x_n)\\
a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n-2 &= (a_1-2)x_1+(a_2-2)x_2+\ldots+(a_n-2)x_n
\end{aligned}$$

Táto úprava bola ekvivalentná a naše zadanie[1] teraz je, že máme dokázať, že existujú také $a_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $i \in 1, \ldots, n$, kde platí, že všetky $a_i$ nie sú naraz rovné 0 a zároveň platí nerovnosť

$$0 \leq a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq \frac{2}{3^n - 1}.$$

Po chvíľke zamyslenia a rôzneho skúšania alebo po pohľade skúseným okom sa rozhodneme zamerať sa len na také priradenia argumentov, že budeme vyberať len z množiny $\{-1, 0, 1, \}$. Vieme, že minimálne to bude, ak všetky argumenty zvolím $-1$ a vtedy bude súčet $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ rovný $-1$ a maximálny bude pre argumenty rovné 1 a vtedy bude súčet 1.

Všetkých možných $n$-tíc argumentov je $3^n$ (pre každý argument volíme z troch možností) a pre každú $n$-ticu argumentov padá súčet $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ do intervalu $[-1, 1]$. Keď si tento interval rozdelíme pravidelne na $3^n - 1$ intervalov, tak každý z nich bude mať dĺžku $2/(3^n - 1)$. Nakoľko máme $3^n$ hodnôt súčtu $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, tak z Dirichletovho princípu vieme, že do aspoň do jedného z týchto intervalov padnú aspoň dva takéto súčty.

Vezmime tieto dva súčty ($a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ a $a'_1x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_nx_n$). Nakoľko vznikli z dvoch rôznych priradení argumentov, tak vieme predpokladať, že $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$. Ďalej o týchto súčtoch vieme povedať, že ich rozdiel je maximálne $2/(3^n - 1)$. Odčítame menší z nich, od toho väčšieho. Vieme, že tento rozdiel bude určite nezáporný a zároveň bude menší, nanajvýš rovný $2/(3^n - 1)$.

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) - (a'_1x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_nx_n) = (a_1 - a'_1)x_1 + (a_2 - a'_2)x_2 + \ldots + (a_n - a'_n)x_n$$

Teraz nám už len zostáva zistiť, či sú čísla $(a_1 - a'_1), \ldots, (a_n - a'_n)$ z množiny hodnôt, ktoré pre argumenty vyžaduje zadanie ($\{-2, -1, 0, 1, 2\}$). Toto je zrejmé, že platí.

Týmto postupom sa nám vždy podarí nájsť priradenie argumentov $a_1, a_2, \ldots, a_n$ také, že sme splníme podmienky zo zadania a tým sme dokázali, že vždy taká $n$-tica existuje.

*Komentár:* Táto úloha nebola neriešiteľná, nakoľko sa našiel aspoň jeden z vás, ktorý ju vyriešil a aj spísal. Táto úloha nevyžadovala ani žiaden zložitý aparát. Jediné, čo bolo potrebné, bolo rozmýšľať a skúšať rôzne nápady a raz by vám to vypadlo.

## Konečné poradie Letného semestra 40. ročníka

| P. | Meno a priezvisko | Kat. | Škola | PS | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | CS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Martin Melicher | S2 | GPostKE | 51 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 105 |
| 2. | Samuel Krajči | S1 | GAlejKE | 54 | 9 | 9 | 9 | 9 | 7 | - | 104 |
| 3. | Matej Hanus | S1 | GPostKE | 51 | 9 | 9 | 9 | 5 | 9 | - | 101 |
| 4. | Miroslav Macko | S1 | ŠpMNDaG | 36 | 9 | 8 | 9 | 9 | 9 | - | 89 |
| 5. | Martin Števko | S2 | GAlejKE | 47 | 9 | 9 | - | 9 | 9 | - | 83 |
| 6. | Branislav Pastula | S1 | GPostKE | 45 | - | 8 | - | 9 | 9 | - | 80 |
| 7. | Jakub Pravda | S1 | ŠpMNDaG | 37 | 4 | 8 | 3 | 9 | 7 | - | 77 |
| 8. | Viktória Brezinová | S2 | GAlejKE | 40 | 9 | 9 | - | 9 | 9 | - | 76 |
| 9. | Norbert Micheľ | Z9 | ZKro4KE | 33 | 8 | 8 | 9 | - | 7 | - | 74 |
| 10. | Patrik Paľovčík | S1 | GPostKE | 36 | - | 9 | 9 | - | 9 | - | 72 |
| 11. | Samuel Novák | S1 | GPostKE | 35 | - | - | - | 9 | 7 | - | 60 |
| 12. | Katarína Demčáková | S1 | GPostKE | 27 | - | 8 | 6 | 1 | 7 | - | 57 |
| 13. | Tomáš Chovančák | S1 | GPostKE | 30 | - | 8 | - | - | 9 | - | 56 |
| 14. | Martin Spišák | S3 | GAlejKE | 31 | - | 8 | - | 9 | 7 | - | 55 |
| 15. | Martin Albert Gbúr | S1 | GPostKE | 26 | - | 9 | - | - | 9 | - | 53 |
| 16. | Michaela Dlugošová | S3 | GKukuPO | 9 | 9 | 9 | 3 | 9 | 8 | - | 47 |
| 17. | Martin Mihálik | S2 | GAlejKE | 26 | 9 | 9 | - | - | - | - | 44 |
| 18. | Radovan Lascsák | S1 | GPostKE | 19 | 3 | 7 | - | - | 7 | - | 43 |
| 19. | Benjamín Mravec | S1 | GPostKE | 24 | - | 3 | - | 1 | 7 | - | 42 |
| 20. - 21. | Matej Tarča | S1 | GPostKE | 27 | - | - | - | - | 7 | - | 41 |
| | Filip Csonka | S2 | GAlejKE | 8 | 9 | 8 | - | 9 | 7 | - | 41 |
| 22. | Martin Masrna | S3 | GPostKE | 24 | - | 9 | - | - | 7 | - | 40 |
| 23. - 24. | Lujza Milotová | Z9 | ZBrusKE | 13 | - | 8 | - | - | 7 | - | 36 |
| | Martin Starovič | S1 | GAMČA | 0 | 8 | 9 | 3 | - | 7 | - | 36 |
| 25. - 28. | Michaela Bobeničová | S2 | GPostKE | 18 | - | - | 3 | 7 | 7 | - | 35 |
| | Michal Masrna | S1 | GPostKE | 35 | - | - | - | - | - | - | 35 |
| | Martin Mičko | S2 | GAlejKE | 9 | 6 | 4 | - | 9 | 7 | - | 35 |

[1] Táto úprava zadania nebola nutná teraz na začiatku. Dá so urobiť aj na konci, každopádne takto to bude trochu krajšie vychádzať.

| P. | Meno a priezvisko | Kat. | Škola | PS | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | CS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Kristína Bratková | S4 | EGJAK | 18 | - | 8 | - | 9 | 0 | - | 35 |
| 29. - 30. | Jakub Mach | S4 | GPostKE | 33 | - | - | - | - | - | - | 33 |
| | Zoltán Hanesz | S3 | GPostKE | 15 | - | - | - | 9 | 9 | - | 33 |
| 31. | Samuel Chaba | S2 | GAlejKE | 4 | 6 | 7 | - | 9 | 6 | - | 32 |
| 32. | Róbert Sabovčík | S1 | GPostKE | 31 | - | - | - | - | - | - | 31 |
| 33. - 34. | Marek Koman | S3 | GAlejKE | 23 | - | - | - | - | 7 | - | 30 |
| | Tomáš Ganz | S1 | SPSSTT | 0 | 6 | 4 | 3 | 3 | 7 | - | 30 |
| 35. | Erik Berta | S2 | GAlejKE | 14 | - | - | - | 6 | 8 | - | 28 |
| 36. - 37. | Jakub Pohly | S3 | GPostKE | 26 | - | - | - | - | - | - | 26 |
| | Martin Šalagovič | S1 | GAlejKE | 0 | 8 | 4 | - | 6 | - | - | 26 |
| 38. | Dominik Kopčak | S2 | GPostKE | 25 | - | - | - | - | - | - | 25 |
| 39. | Andrea Faguľová | S1 | GPostKE | 21 | - | - | - | - | - | - | 21 |
| 40. | Roman Rumiantsev | S1 | GAEinBA | 19 | - | - | - | - | - | - | 19 |
| 41. - 42. | Vratislav Madáč | S2 | GAlejKE | 18 | - | - | 0 | - | - | - | 18 |
| | Pavol Drotár | S3 | GPostKE | 0 | - | - | - | 9 | 9 | - | 18 |
| 43. - 44. | Ondrej Tomášik | S1 | GJgtBB | 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | - | 17 |
| | Jakub Genči | S4 | GPostKE | 17 | - | - | - | - | - | - | 17 |
| 45. | Adam Dragula | S2 | GPostKE | 4 | 0 | 3 | 3 | - | 6 | - | 16 |
| 46. | Juraj Vlašič | S1 | GAEinBA | 12 | - | 1 | 0 | - | - | 1 | 15 |
| 47. - 48. | Kristína Galikova | S2 | ŠpMNDaG | 14 | - | - | - | - | - | - | 14 |
| | Timea Szöllősová | S1 | GAMČA | 14 | - | - | - | - | - | - | 14 |
| 49. | Andrej Pankuch | Z9 | GAlejKE | 11 | - | - | - | - | - | - | 11 |
| 50. | Juraj Mičko | S4 | GPostKE | 9 | - | - | - | - | - | - | 9 |
| 51. - 52. | Dávid Šatala | S2 | GPostKE | 8 | - | - | - | - | - | - | 8 |
| | Juraj Jursa | S2 | GAlejKE | 0 | 8 | - | - | - | - | - | 8 |
| 53. - 54. | Andrea Kirnágová | S1 | GĽŠ26MI | 7 | - | - | - | - | - | - | 7 |
| | Natália Tóthová | S3 | GAlejKE | 0 | - | - | - | - | 7 | - | 7 |
| 55. | Jonáš Suvák | S1 | GJarPO | 5 | - | - | - | - | - | - | 5 |
| 56. | Jakub Murin | S1 | GJgtBB | 4 | - | - | - | - | - | - | 4 |
| 57. | Michal Barna | S2 | ŠpMNDaG | 3 | - | - | - | - | - | - | 3 |
| 58. - 59. | Samuel Amrich | S2 | GPostKE | 1 | - | - | - | - | - | - | 1 |
| | Michaela Borošová | S2 | GPostKE | 1 | - | - | - | - | - | - | 1 |
| 60. | Ján Bartoš | S3 | GŠko21VK | 0 | - | - | - | - | - | - | 0 |

## Za podporu a spoluprácu ďakujeme


**Názov** STROM – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • Október 2016 • Zimný semester 41. ročníka (2016/2017)
**Internet:** `http://seminar.strom.sk`
**E-mail:** `strom@strom.sk`

**Vydáva:** Združenie STROM, Jesenná 5, 041 54 Košice
**Internet:** `https://zdruzenie.strom.sk`
**E-mail:** `info@strom.sk`