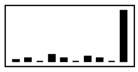
STROM
Korešpondenčný matematický seminár

Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie Stromu, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame Tvoje ďalšie riešenia!

Stromáci

1. Opravovali: **Viki Brezinová, Lujza Milotová a Martin Andy Andričík**
Počet riešení: 44



Nech a a b sú kladné celé čísla a c je kladné reálne číslo, pre ktoré platí:

$$\frac{a+1}{b+c} = \frac{b}{a}.$$

Dokážte, že $c \geq 1$.

Riešenie

Rozoberme tieto 2 prípady:

$a < b$:

Z tohto predpokladu (a kladnosti a, b) máme, že zlomok $\frac{b}{a} > 1$. Z rovnosti v zadaní potom musí platiť aj $\frac{a+1}{b+c} > 1$, teda $a+1 > b+c$. Po odčítaní 1 máme $a > b+c-1$. Zároveň z predpokladu $a < b$ a z toho, že a, b sú kladné celé čísla vieme, že a musí byť aspoň o 1 menšie ako b. To si vieme zapísať nerovnosťou $a \leq b-1$. Z oboch nerovností dokopy dostaneme: $b-1 \geq a > b+c-1$. Z toho vyplýva $b-1 > b+c-1$, a teda $c < 0$, čo je spor so zadaním (c je kladné číslo). Takže musí platiť $a \geq b$.

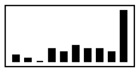
$a \geq b$:

Z tohto predpokladu vieme, že $\frac{b}{a} \leq 1$ a z rovnosti v zadaní teda dostávame $a+1 \leq b+c$. Po odčítaní 1 máme $a \leq b+c-1$. Keď využijeme predpoklad $a \geq b$, tak dostaneme: $b \leq a \leq b+c-1$. Z toho vyplýva $b \leq b+c-1$ a odtiaľ dostávame $c \geq 1$, čo je presne to, čo sme chceli dokázať.

Komentár

Jednoduchým riešením úlohy bolo pozrieť sa na dva prípady $a \geq< b$. Niektorí riešitelia skúšali rovnosť zlomkov prepísať na podobnosť čitateľov/menovateľov, čo sa mnohým i podarilo; prišlo aj jedno pekné riešenie využívajúce monotónnosť c ako $f(b)$. U zopár riešení sme strhávali časť bodov aj za nepresnosť formulácie: "ak c je malé, b to musí dorovnať", hoci sme tušili, že mechanizmu rozumiete.

2. Opravovali: **Peťo Kovács a Michal Masrna**
Počet riešení: 42



Nech m je kladné celé číslo. Označme $a < b < c < d$ štyroch najmenších kladných deliteľov m. Nájdite všetky také m, pre ktoré platí $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Riešenie

Začnime uvedomením, že 1, najmenšie kladné celé číslo, delí každé celé číslo. Z toho vieme, že $a = 1$.

Predpokladajme na chvíľu, že by m bolo nepárne. V tom prípade by aj všetky delitele m, čiže aj a, b, c, d, boli nepárne. Keďže druhá mocnina nepárneho čísla je nepárne číslo, aj a^2, b^2, c^2, d^2 by všetky boli nepárne. Potom $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ je súčet 4 nepárnych čísel, teda párne číslo. To je však v spore s naším predpokladom, a teda m nemôže byť nepárne.

Keďže m je párne číslo, tak 2 (druhé najmenšie kladné celé číslo) je deliteľ m. Môžeme konštatovať, že $b = 2$.

Doterajšie zistenia môžeme zhrnúť nasledujúcim vzťahom:

$$m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1^2 + 2^2 + c^2 + d^2 = 5 + c^2 + d^2$$

Ľavá strana rovnosti je deliteľná 2 (keďže m je párne), takže aj pravá musí byť. To nastáva vtedy, ak práve jedno z čísel c a d je párne. Rozoberme obe možnosti.

1. **c je párne ($c = 2k$), d je nepárne.**

   Pozrime sa na to, aké hodnoty môže v tomto prípade nadobúdať k. Ak c delí m, potom $2k$ ($c = 2k$) delí m, a teda aj k delí m. Zároveň $k < 2k$, a keďže $2k$ je tretí najmenší deliteľ, potom k musí byť buď 1 alebo 2. Ak $k = 1$, tak $c = 2k = 2 \cdot 1 = 2 = b$, čo je v rozpore s $b < c$. V druhom prípade $c = 2k = 2 \cdot 2 = 4$. Potom platí:

   $$m = 5 + c^2 + d^2 = 5 + 4^2 + d^2 = 21 + d^2$$

   Keďže d delí m, musí d deliť aj $21 + d^2$, z čoho vyplýva, že d delí 21. Takže $d \in \{1, 3, 7, 21\}$. Zároveň $d > 4$ a ak by $d = 21$, potom by aj 3 bol deliteľ m, teda $c = 4$ by nebol tretí najmenší deliteľ m. Ostáva jediná možnosť, konkrétne $d = 7$. Potom:

   $$m = 21 + d^2 = 21 + 7^2 = 70$$

   Avšak 4 nie je deliteľ 70. Možnosť $c = 2k$ nevedie k žiadnemu riešeniu.

2. **c je nepárne, d je párne ($d = 2l$)**

   V tomto prípade $2l$ delí m, takže aj l delí m a $l < 2l$. Nastávajú 3 možnosti.

   (a) $l = 1$
   Potom $d = 2l = 2 \cdot 1 = 2$, čo je v rozpore s $b < d$

   (b) $l = 2$
   Potom $d = 2l = 2 \cdot 2 = 4$. Dostávame $2 < c < 4$, z čoho vyplýva že $c = 3$. Potom $m = 5 + c^2 + d^2 = 5 + 3^2 + 4^2 = 30$. Avšak opäť, 4 nie je deliteľ 30.

   (c) $l = c$
   Potom $m = 5 + l^2 + (2l)^2 = 5 + 5l^2 = 5(1 + l^2)$. Vidíme, že 5 delí m. Jediná možnosť, kedy by 5 mohlo nebyť medzi štyrmi najmenšími deliteľmi, je ak by tieto delitele boli 1, 2, 3 a 4. Túto možnosť sme už rozobrali v prípade (b). Keďže d je párne, nemôže mať hodnotu 5, a preto $c = l = 5$ a $d = 2l = 2 \cdot 5 = 10$:

   $$m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 1 + 4 + 25 + 100 = 130$$

   Skutočne, delitele 130 sú $\{1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130\}$, z ktorých štyri najmenšie sú práve 1, 2, 5 a 10.

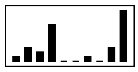
Podmienky zadania spĺňa jediné m, a to 130.

Komentár

Väčšine riešiteľov sa podarilo nájsť správne riešenie úlohy. Najväčším kameňom úrazu bolo dôkladné zdôvodnenie, prečo je toto riešené jediným vyhovujúcim. Ak sa v takomto type úlohy rozhodnete rozoberať možnosti, treba sa skutočne uistiť, že ste žiadnu nevynechali. Zarazilo nás, že vo viacerých riešeniach sa objavila úvaha: "Ak 2 delí m a 4 delí m, potom aj 8 delí m.", ktorá nie je správna.

3.

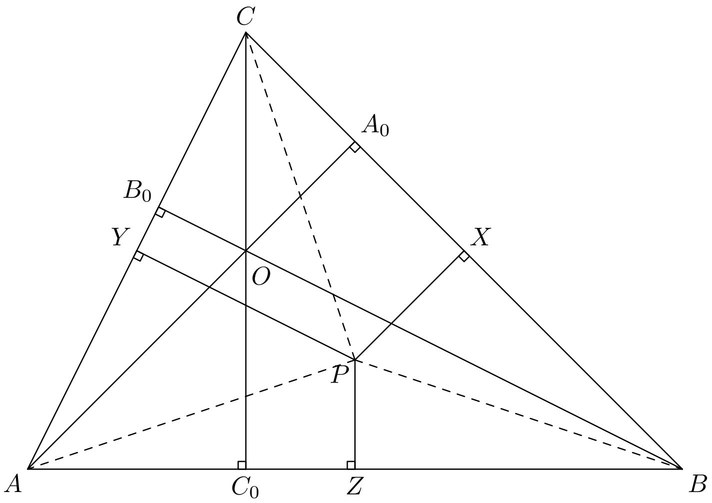
Opravovali: **Žanetka Semanišinová a Jano Richnavský**
Počet riešení: 29



Nech ABC je trojuholník a a, b, c sú postupne dĺžky jeho strán oproti vrcholom A, B a C. Nech S je obsah tohto trojuholníka. Dokážte, že ak P je bod vo vnútri trojuholníka ABC, pre ktorý platí $a|PA|+b|PB|+c|PC| = 4S$, tak potom P je ortocentrum ABC.

Riešenie

Označme A_0, B_0 a C_0 päty výšok vedených postupne z vrcholov A, B, C v trojuholníku ABC a ortocentrum O. Majme v trojuholníku bod P, z ktorého veďme kolmice postupne na strany a, b, c, päty týchto kolmíc označme postupne X, Y, Z.



Obsah trojuholníka ABC vieme vyjadriť ako súčet obsahov trojuholníkov ABP, BCP a ACP, preto platí:

$$S_{BCP} + S_{ACP} + S_{ABP} = S$$

$$\frac{a \cdot |XP|}{2} + \frac{b \cdot |YP|}{2} + \frac{c \cdot |ZP|}{2} = S$$

$$a \cdot |XP| + b \cdot |YP| + c \cdot |ZP| = 2S \tag{1}$$

Pre obsah trojuholníka ABC zároveň platí:

$$\frac{a \cdot |AA_0|}{2} = \frac{b \cdot |BB_0|}{2} = \frac{c \cdot |CC_0|}{2} = S$$

$$\frac{a \cdot |AA_0|}{2} + \frac{b \cdot |BB_0|}{2} + \frac{c \cdot |CC_0|}{2} = 3S$$

$$a \cdot |AA_0| + b \cdot |BB_0| + c \cdot |CC_0| = 6S \tag{2}$$

Zrejme platí $|XP| + |PA| \geq |AA_0|$, keďže AA_0 je výškou, a teda najkratšou možnou vzdialenosťou vrcholu A od strany a. Výrazy sa budú rovnať práve vtedy, keď P bude ležať na výške AA_0, čiže $X{=}A_0$. Analogicky platí $|YP| + |PB| \geq |BB_0|$ a $|ZP| + |PC| \geq |CC_0|$. Všimnime si, že rovnosť vo všetkých troch odhadoch nastane práve vtedy, keď P je ortocentrom. Odhadnutím výrazov $|AA_0|$, $|BB_0|$ a $|CC_0|$ v rovnosti (2) dostávame:

$$a \cdot (|XP| + |PA|) + b \cdot (|YP| + |PB|) + c \cdot (|ZP| + |PC|) \geq 6S \tag{3}$$

Po roznásobení a odčítaní rovnosti (1) dostávame:

$$a \cdot |XP| + b \cdot |YP| + c \cdot |ZP| + a \cdot |PA| + b \cdot |PB| + c \cdot |PC| \geq 6S$$

$$a \cdot |PA| + b \cdot |PB| + c \cdot |PC| \geq 4S$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť v (3). Už sme ukázali, že to je ekvivalentné tomu, že P je ortocentrum. Keďže zo zadania vieme, že táto rovnosť platí, tak sme ukázali, že P ortocentrum skutočne je.

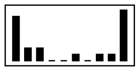
Komentár

Väčšina riešiteľov, ktorí najprv ukázali, že ak je P ortocentrom, tak daná rovnosť platí, a potom vysvetlili, prečo to pre iné body P platiť nebude, získala plný počet bodov. Bolo však značné množstvo riešení, ktoré ukázali iba to, že ak P je ortocentrom, tak daná rovnosť platí, a tam svoje riešenie ukončili. Takto však dokázali iba opačnú implikáciu. V tomto prípade chýbal dôkaz o tom, že žiadny iný bod P zadaniu vyhovovať nebude. Preto nabudúce odporúčame dávať si veľký pozor na smer implikácie, ktorú chcete v úlohe dokazovať. V tejto úlohe síce platilo, že dokázať, že ortocentrum vyhovuje, zvyčajne pomohlo tomu, aby ste prišli na riešenie, ale to nič nemení na tom, že dokázať bolo treba druhú implikáciu.

Na záver ešte drobná logická vsuvka: Nie je pravda, že úloha nedáva zmysel pre tupouhlý trojuholník. Je pravda, že pre tupouhlý trojuholník nevyhovuje ani ortocentrum, pretože sa nenachádza vo vnútri trojuholníka ABC, ale keďže zadanú rovnosť vtedy nespĺňa žiadny bod v trojuholníku ABC, tvrdenie v úlohe stále platí.

4.

Opravovali: **Martin Masrna a Róbert Sabovčík**
Počet riešení: 22



V tabuľke 10×10 sú napísané všetky čísla od 1 do 100, každé práve v jednom políčku. V každom riadku zafarbíme tretie najväčšie číslo. Ukážte, že existuje riadok, v ktorom je súčet čísel menší alebo rovný súčtu zafarbených čísel.

Riešenie

Označme si zafarbené čísla vzostupne od a_1 po a_{10}. Vieme, že platí $a_{10} \geq 80$, lebo jediné čísla väčšie ako a_{10} môžu byť dve najväčšie čísla v každom riadku. Preto v tabuľke môže existovať nanajvýš 20 čísel väčších ako a_{10}. Podobne $a_9 \geq 72$, lebo jediné väčšie čísla môžu opäť byť len dve najväčšie v každom riadku a zvyšných osem čísel v riadku s a_{10}. Preto pre súčet zafarbených čísel platí, že $a_{10} + \cdots + a_1 \geq 152 + a_8 + \cdots + a_1$. Vieme tiež, že $a_2 \geq a_1 + 1, a_3 \geq a_1 + 2, \ldots, a_8 \geq a_1 + 7$. Preto, $a_{10} + \cdots + a_1 \geq 152 + a_8 + \cdots + a_1 \geq 180 + 8a_1$.

Vieme, že súčet čísel v riadku s a_1 bude maximálny, ak dve najväčšie čísla daného riadku budú 100 a 99 a zvyšné čísla budú čo najbližšie k a_1, teda $a_1 - 1, \ldots, a_1 - 7$. Potom súčet tohto riadku bude $171 + 8a_1$.

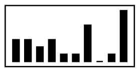
Platí, že $180 + 8a_1 > 171 + 8a_1$, a keďže $a_{10} + \cdots + a_1 \geq 152 + a_8 + \cdots + a_1 \geq 180 + 8a_1$, tak $a_{10} + \cdots + a_1 > 171 + 8a_1$. Ukázali sme teda, že riadok obsahujúci a_1 bude mať vždy menší súčet, ako majú zafarbené čísla. Preto vždy bude existovať aspoň jeden riadok s menším súčtom, ako súčet zafarbených čísel.

Komentár

Mnohí z vás zvládli úlohu vyriešiť správne, čo nás veľmi teší. Veľa z vás ale úlohu vyriešilo iba pre jedno konkrétne rozmiestnenie čísel, čo však neznamená, že to bude platiť stále. Dokonca ani v prípade, ak toto konkrétne rozmiestnenie minimalizuje súčet zafarbených čísel. Druhou častou chybou bolo to, že ste začali od rozmiestenia s minimálnym súčtom zafarbených čísel, a následne prišiel argument ako: "Logicky vidíme, že ak budeme zvyšovať čísla v riadku, tak sa zvýšia aj zafarbené čísla, a teda vždy bude existovať riadok ... ", ktorý samozrejme, do korektného riešenia nepatrí.

5. Opravovali: **Dano Onduš a Kristín Mišlanová**

Počet riešení: 26



Nech $p \geq 3$ je prvočíslo. Skokan Jozef skáče po p kameňoch usporiadaných do kruhu. Začína na niektorom z kameňov a v k-tom skoku sa posunie o k kameňov v smere hodinových ručičiek. Koľko rôznych kameňov navštívi počas prvých $p-1$ skokov?

Riešenie

Očíslujme si kamene v kruhu 0 až $p-1$. Ak na začiatku stojíme na kameni 0, tak po k-tom skoku budeme stáť na kameni $1+2+\cdots+k \bmod p$, t.j. na kameni, ktorý je určený zvyškom čísla $1+2+\cdots+k$ po delení p. Našou úlohou je preto zistiť, koľko rôznych hodnôt bude tento výraz nadobúdať.

Pozrime sa, kedy platí, že po k-tom skoku stojí na rovnakom kameni ako po l-tom skoku, kde $k > l$. Platí to práve vtedy, ak $1+2+\cdots+k \equiv 1+2+\cdots+l \bmod p$. Keď si to upravíme pomocou vzorca, tak chceme $\frac{k(k+1)}{2} - \frac{l(l+1)}{2} = m \cdot p$ pre nejaké kladné celé číslo m. To ešte vieme upraviť na $(k+l+1)(k-l) = 2mp$. Keďže výraz na pravej strane je deliteľný p, aj výraz naľavo musí byť. Obidve z čísel k a l sú menšie ako p, keďže končíme skokom $p-1$. Preto aj $(k-l)$ je menšie ako p, a keďže predpokladáme, že sa nerovnajú, tak táto zátvorka nemôže byť deliteľná p. Z toho vyplýva, že p musí deliť $k+l+1$. Tento výraz je kladný a môže nadobúdať hodnotu nanajvýš $2p-2$, čiže ak má byť deliteľný p, musí byť rovný p. Z toho $l = p-1-k$.

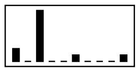
Preto pre každý skok k je jednoznačne daný skok l, taký, že po nich bude Jozef na rovnakom kameni. Takto dostávame dvojice skokov, okrem skoku $\frac{p-1}{2}$, ktorý by bol v dvojici sám so sebou a skoku $p-1$, po ktorom skončíme na kameni, kde sme začali. Dokopy tak máme $\frac{p-3}{2} + 2 = \frac{p+1}{2}$ rôznych kameňov, ktoré navštívi Jozef.

Komentár

Väčšina z vás si všimla dvojice skokov a pomocou nich dokázala, že sa kamene budú opakovať, a tak navštívime najviac $\frac{p+1}{2}$ kameňov. Ťažšie bolo ukázať, že kamene, na ktorých skončíme v rôznych dvojiciach budú rôzne. Na to bolo potrebné použiť argument s deliteľnosťou číslom p ako v riešení vyššie.

6. Opravovali: **Timka Szöllősová a Maťo Gbúr**

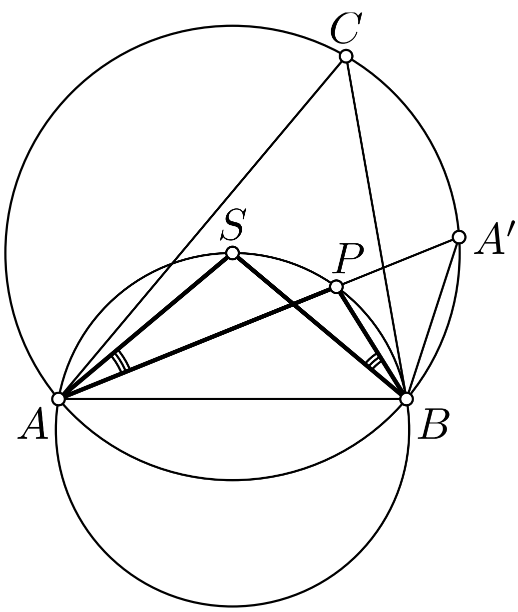
Počet riešení: 12



Štvorsten $ABCD$, ktorého každá stena je ostrouhlý trojuholník, je vpísaný do sféry so stredom v bode O. Priamka prechádzajúca bodom O kolmá na rovinu ABC pretína túto sféru v bode D', ktorý leží na opačnej strane roviny ABC ako bod D. Priamka DD' pretína rovinu ABC v bode P, ktorý leží vnútri trojuholníka ABC. Dokážte, že ak $|\sphericalangle APB| = 2|\sphericalangle ACB|$, tak $|\sphericalangle ADD'| = |\sphericalangle BDD'|$.

Riešenie

(podľa Adama Džavoronka)



Označme stred kružnice opísanej trojuholníku ABC ako S, čo je zároveň aj priesečník osi OD' s rovinou ABC. Podľa vety o stredovom a obvodovom uhle máme, že $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle ACB|$. No podľa zadania aj $|\sphericalangle APB| = 2|\sphericalangle ACB|$, a teda $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle APB|$. To znamená, že body A, B, P, S ležia na kružnici.

Uvedomme si, že ak využijeme otočenie okolo osi OS o uhol $\sphericalangle ASB$, polpriamka SA sa nám zobrazí na SB. Okrem toho, uhly $\sphericalangle PAS$ a $\sphericalangle PBS$ sú obvodové nad tetivou PS, a teda sú zhodné, ako ilustruje aj obrázok. To znamená, že sa nám zobrazí aj priamka AP na priamku BP. Vďaka tomu sa pri tomto otočení uhol $\sphericalangle PAD'$ zobrazí na uhol $\sphericalangle PBD'$ (pretože bod D' leží na osi OS), preto $|\sphericalangle PAD'| = |\sphericalangle PBD'|$.

Nech A' je priesečník AP a sféry rôzny od A. Keďže A' sa nachádza v rovine ABC, $|AS| = |A'S|$, čiže pravouhlé trojuholníky ASD' a $A'SD'$ sú zhodné podľa vety *sus*. Potom aj $|AD'| = |A'D'|$, teda trojuholník $AA'D'$ je rovnoramenný. Z toho plynie, že $|\sphericalangle A'AD'| = |\sphericalangle AA'D'|$.

Keďže P je priesečníkom AA' a DD', všetky tieto body ležia v rovine danej týmito dvoma priamkami. Body A, A', D, D' sú navyše body sféry, takže ležia na jednej kružnici (predstavte si, ako rovina, v ktorej ležia, pretína sféru). To nám umožňuje využiť vetu o obvodových uhloch, aby sme dosiahli $|\sphericalangle ADD'| = |\sphericalangle AA'D'| = |\sphericalangle A'AD'| = |\sphericalangle PAD'|$ (v druhej rovnosti sme použili záver z predchádzajúceho odstavca). Analogicky pre bod B platí, že $|\sphericalangle BDD'| = |\sphericalangle PBD'|$. Avšak my už vieme, že $|\sphericalangle PAD'| = |\sphericalangle PBD'|$, z čoho už vyplýva požadovaná rovnosť $|\sphericalangle ADD'| = |\sphericalangle BDD'|$.

Komentár

Túto úlohu sprevádzala veľmi častá chyba, ktorej sa vyhli len dvaja riešitelia.

Zo zadania vieme, že $|\sphericalangle APB| = 2|\sphericalangle ACB|$. To, že veta o stredovom a obvodovom uhle hovorí, že $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle ACB|$, kde S je stred opísanej kružnice trojuholníku ABC, ešte neznamená, že body P a S sú totožné! Existuje totiž množstvo bodov P s danou vlastnosťou. Veta o stredovom a obvodovom uhle tvrdí len to, že S je jedným z nich.

Dávajte si preto pozor na to, ako presne znie výrok, ktorý sa chystáte použiť - čo je v ňom predpoklad, čo je jeho implikácia (treba si dávať pozor aj na to, čo je implikácia a čo ekvivalencia).

Zadania úloh zimného semestra 46. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **22. november 2021**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke `seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf`.

1. Žanetka má dve spravodlivé hracie kocky (všetky čísla na nich padajú s rovnakou pravdepodobnosťou). Kristín má dve špeciálne hracie kocky, ktoré nie sú spravodlivé, ale sú totožné (napríklad, ak na jednej padá šestka s pravdepodobnosťou 1/2, tak aj na druhej). Zistite, ktorá z nich má vyššiu šancu hodiť dve rovnaké čísla.

2. Mihál a Martin hrajú hru na štvorcovej mriežke 6×6. Vo svojom ťahu každý hráč zapíše do ľubovoľnej prázdnej bunky ľubovoľné racionálne číslo, ktoré sa ešte nenachádza nikde v mriežke. Začína Mihál, potom sa pravidelne striedajú. Keď budú vyplnené všetky políčka mriežky, v každom riadku sa zafarbí políčko s najväčším číslom. Mihál vyhrá, ak vie spojiť prvý a posledný rad čiarou prechádzajúcou len po zafarbených políčkach (čiara môže prechádzať aj rohom, ktorým susedia dve zafarbené políčka). Martin vyhrá, ak mu v tom zabráni. Kto má v tejto hre víťaznú stratégiu, a akú?

3. Nech ABC je trojuholník s $|AC| > |AB|$ a U je stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Dotyčnice ku kružnici opísanej tomuto trojuholníku v bodoch A a B sa pretínajú v bode T. Os strany BC pretína stranu AC v bode S. Ukážte, že body A, B, S, T a U ležia na kružnici, a že priamka ST je rovnobežná s priamkou BC.

4. Dokážte, že neexistuje prvočíslo p, pre ktoré by existoval polynóm px^2+ax+b v premennej x s celočíselnými koeficientami a, b a dvoma rôznymi racionálnymi koreňmi v intervale $(0, 1)$.

5. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky reálne čísla x a y platí $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ je najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x.

6. Po štvorcovej tabuľke $(4k + 2) \times (4k + 2)$ sa pohybuje prefíkaný leňochod len medzi štvorčekmi susediacimi hranou. Leňochod spraví nasledovnú prechádzku: začne v rohovom štvorčeku tabuľky, prejde každým štvorčekom práve raz a skončí na mieste, kde začal. V závislosti od k určte najväčšie prirodzené číslo n také, že v tabuľke musí existovať riadok alebo stĺpec, do ktorého leňochod vstúpil aspoň n-krát (vstúpiť do riadku/stĺpca znamená presunúť sa z iného riadku/stĺpca do tohto riadku/stĺpca).

Poradie po 1. sérii zimného semestra 46. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 2.	Lucia Chladná	S1	GAMČABA	9	9	9	9	9	2	0	54
	Adam Džavoronok	S3	GPoštKE	9	9	9	9	9	9	0	54
3.	Martin Kopčány	S3	GJChaBR	9	9	9	9	9	5	0	50
4.	Veronika Chovancová	S3	PiarGTN	9	9	9	9	9	2	0	47
5.	Michal Pecho	S4	SDubn	9	9	9	9	9	-	0	45
6.	Oskar Hritz	S3	GPoštKE	9	9	9	9	6	-	0	42
7.	Karin Eštoková	S3	GMRŠKE	9	7	9	9	5	-	0	39
8.	Richard Vodička	S1	GAlejKE	9	9	-	-	9	-	0	36
9.	Michal Iľkovič	S1	GSMTŠPO	1	7	-	8	8	2	0	34
10. - 12.	Sara Gašparová	S3	GAMČABA	9	9	9	-	6	-	0	33
	Natália Čigašová	S3	GPoštKE	9	9	8	7	-	-	0	33
	Marian Rajnoha	S3	GAK	9	8	3	5	6	2	0	33
13.	Ondrej Králik	S1	GAlejKE	9	9	3	-	0	2	0	32
14.	Katarína Farbulová	S1	GPoštKE	9	9	-	-	3	-	0	30

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
15. - 16.	Marek Horváth	S1	GKonšPO	9	7	-	-	6	-	0	29
	Veronika Vodičková	S1	GAlejKE	7	9	6	-	-	-	0	29
17.	Erik Novák	S4	GPoštKE	6	7	9	-	6	-	0	28
18. - 20.	Martin Šmilňák	S2	GAlejKE	9	9	-	9	-	-	0	27
	Matúš Libák	Z9	GAlejKE	9	-	9	-	-	-	0	27
	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S1	GAlejKE	9	9	-	-	-	-	0	27
21.	Martin Dudjak	S1	SMládPP	9	8	-	-	0	-	0	25
22.	Bianka Gurská	S2	GPoštKE	9	6	9	-	-	-	0	24
23.	Matúš Masrna	S4	GPoštKE	9	6	8	-	-	-	0	23
24.	Jakub Kulka	S3	GMRŠKE	9	-	3	-	9	-	0	21
25. - 26.	Ľubomír Vargovčík	S3	GPoštKE	9	-	8	-	3	-	0	20
	Miriam Halasová	S2	GSMTŠPO	6	5	3	1	2	2	0	20
27.	Lukáš Lučanský	S4	gymtv	9	3	3	2	2	-	0	19
28. - 29.	Filip Rásó	S2	SBG Galanta	9	4	1	0	3	-	0	18
	Martin Janček	None		9	5	3	-	1	-	0	18
30. - 31.	Oskar Cacara	Z9	ZKro4KE	7	5	-	-	-	-	0	17
	Branislav Ječim	S2	GŠkolSN	9	5	3	-	-	-	0	17
32.	Paulína Dujavová	S4	GJARMPO	9	5	-	-	-	2	0	16
33. - 34.	Terézia Stanová	S2	EGJAKKE	9	3	3	-	-	-	0	15
	Adela Horváthová	S2	GPoštKE	9	6	-	-	-	-	0	15
35. - 36.	Viliam Geffert	S3	GPoštKE	3	9	2	-	-	-	0	14
	Daniela Jurišinová	S2	GLStöBJ	6	6	-	2	-	-	0	14
37.	Štefan Vašak	S3	GPoštKE	-	9	-	-	4	-	0	13
38.	Richard Gerboc	S3	GPoštKE	4	8	-	-	-	-	0	12
39. - 41.	Oliver Seman	Z9	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	9
	Tomáš Tall	S3	GSMTŠPO	3	4	1	0	1	0	0	9
	Kristína Štefčáková	S2	GKonšPO	4	1	1	0	-	2	0	9
42. - 43.	Viktória Nogová	S2	GLStöBJ	3	3	-	1	-	-	0	7
	Lukáš Hudák	S3	GLStöBJ	1	3	2	0	1	-	0	7
44.	Natália Poliačiková	S1	GPoštKE	-	4	-	-	-	-	0	4
45.	Monika Birošová	S2	GLStöBJ	3	-	-	0	-	-	0	3
46. - 47.	František Bublák	Z7	GABerSC	-	0	-	0	-	-	0	0
	Ladislav Jakab	S2	soskn	0	0	0	0	0	0	0	0

Názov: Strom – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 2 • November 2021 • Zimný semester 46. ročníka (2021/2022)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.