Ahoj!

Tvojmu pohľadu zjavne neuniklo ďalšie vydanie Stromu, v ktorom nájdeš nielen poradie po prvej sérii tohto semestra, ale aj naše vzorové riešenia. Nezabúdaj však, že sme ešte len v polčase, tak určite nepoľavuj a pusti sa do druhej série. S radosťou očakávame tvoje ďalšie riešenia!

Stromáci

2% z daní

Aj tento rok je možné venovať 2% (v niektorých prípadoch dokonca až 3%) daní verejnoprospešným organizáciám, ako sme my.

Peniaze získané z 2% v Strome využívame na pokrytie časti nákladov spojených s aktivitami pre vás (kopírovanie časopisov, poštovné, ceny na súťažiach, aktivity na sústredeniach…).

Chceme vás preto poprosiť, aby ste rodičom, členom svojej blízkej aj vzdialenej rodiny, susedom a kľudne aj cudzím ľuďom na ulici porozprávali o našich aktivitách a poprosili ich, aby svojou troškou podporili našu dobrovoľnícku činnosť a pomohli tým skupine mladých cieľavedomých ľudí zabezpečujúcich chod týchto úžasných seminárov, ktoré tak zbožňujete. Porozprávajte im, čo pre vás znamená sústredenie, čo vám dáva riešenie úloh nášho seminára, a vysvetlite im, že takto podporia aj váš rozvoj a prispejú k zmysluplnému tráveniu vášho voľného času.

Potrebné informácie o tom, ako darovať 2%, nájdete na stránke `zdruzenie.strom.sk/sk/zdruzenie/2percenta/`. Radi vám zodpovieme ľubovoľné otázky ohľadom našej podpory aj na e-mailovej adrese `info@strom.sk`. Ďakujeme!

Tábor mladých matematikov

V termíne od 12. do 19. augusta 2022 sa udeje ten najlepší tábor tohoto roka - Tábor mladých matematikov! Bude sa konať na Chate Radzim pri obci Vyšná Slaná. Všetky podrobné informácie nájdete v pozvánke na stránke `seminar.strom.sk/media/uploads/pozvankaucastniktmm2022.pdf`.

Pýtate sa, čo je Tábor mladých matematikov? Je to tábor určený pre budúcich siedmakov základných škôl až pre budúcich druhákov stredných škôl (a, samozrejme, prislúchajúce ročníky viacročných gymnázií). Program tábora pripomína obľúbené sústredenia, je však o dva dni dlhší, a preto o dva dni lepší!

Neváhajte pridlho, kapacita tábora je obmedzená. Tešíme sa na vás!

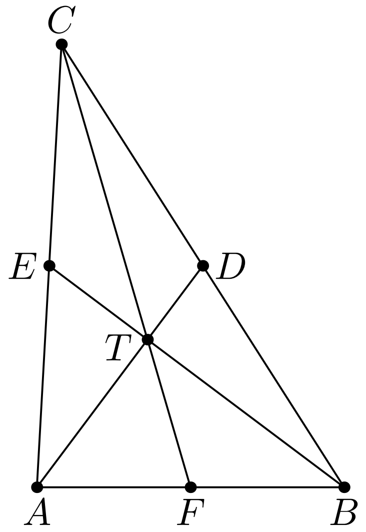
1.

Opravovali: **Žanetka Semanišinová a Lujza Milotová**
Počet riešení: 53 Najkrajšie riešenia: **Marek Horváth, Michal Pecho**

Majme trojuholník ABC. Stredy strán BC, AC a AB sú označené postupne písmenami D, E a F. Dve ťažnice AD a BE sú navzájom kolmé. Vieme, že $|AD| = 3$ a $|BE| = 4$. Vypočítajte dĺžku ťažnice CF tohto trojuholníka.

Riešenie

Ťažnice AD a BE sa pretnú v bode T, ktorý je ťažiskom trojuholníka ABC. Ťažisko delí ťažnice v pomere $1 : 2$, pričom dlhšia časť je medzi vrcholom a ťažiskom a kratšia časť je medzi ťažiskom a stredom strany. Z toho $|AT| = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$ a $|BT| = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$. Trojuholník ABT je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole T. Z Pytagorovej vety dopočítame dĺžku strany AB ako $|AB| = \sqrt{|AT|^2 + |BT|^2} = \sqrt{2^2 + (\frac{8}{3})^2} = \sqrt{4 + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$. Zároveň bod T leží na Tálesovej kružnici zostrojenej nad priemerom AB so stredom v bode F. Odtiaľ $|AF| = |FB| = |TF| = \frac{5}{3}$. Úsečka TF tvorí tretinu ťažnice CF. Potom $|CF| = 3 \cdot \frac{5}{3} = 5$. Ťažnica CF má dĺžku 5.



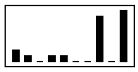
Komentár

S úlohou ste si poradili dobre a väčšina z vás sa zvládla k riešeniu dopracovať buď spôsobom ako vo vzorovom riešení, pomocou kosínusovej vety, alebo dokreslením trojuholníka ABT na obdĺžnik (čím vlastne dokázali Tálesovu vetu :)).

Chyba, ktorá nás zamrzela najviac, bolo zaokrúhľovanie dĺžok, pretože ak chceme presne vyriešiť matematickú úlohu, musíme sa zmieriť s počítaním s odmocninami a zlomkami, inak nám takmer isto nevyjde správny výsledok. Bodíky išli dole aj za chýbajúce odôvodnenia (napr. ťažisko delí ťažnice v pomere 2:1).

2. Opravovali: **Matúš Masrna a Kristín Mišlanová**

Počet riešení: 22 Najkrajšie riešenie: **Tomáš Kubrický**



Uvažujme polynóm $p(x)$ s celočíselnými koeficientami. Na grafe funkcie, ktorú určuje polynóm p, zvolíme dva body s celočíselnými súradnicami. Ukážte, že ak je vzdialenosť týchto bodov celočíselná, tak je úsečka, ktorá ich spája, rovnobežná s osou x.

Riešenie

Majme dané 2 body A a B s celočíselnými súradnicami $(x_1, p(x_1))$ a $(x_2, p(x_2))$ na grafe funkcie. Potom pomocou vyjadrenia vzdialenosti dvoch bodov v súradnicovej sústave pomocou Pytagorovej vety vieme, že

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (p(x_2) - p(x_1))^2.$$

Keď si označíme koeficienty polynómu postupne a_0 až a_n, môžeme rozpísať polynóm ako $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Dosaďme tento tvar do rozdielu $p(x_2) - p(x_1)$ a ďalej upravujme.

$$p(x_2) - p(x_1) = a_0 + a_1x_2 + \cdots + a_nx_2^n - a_0 - a_1x_1 - \ldots - a_nx_1^n$$
$$p(x_2) - p(x_1) = a_1(x_2 - x_1) + a_2(x_2^2 - x_1^2) + \cdots + a_n(x_2^n - x_1^n)$$

Teraz využijeme fakt, že každá zo zátvoriek v tvare $(x_2^k - x_1^k)$ je deliteľná výrazom $(x_2 - x_1)$, a vyjmeme ho pred zátvorku. Keďže súradnice x_1 a x_2 a tiež koeficienty polynómu sú celé čísla, tak aj zátvorka bude celočíselná, a teda si ju môžeme označiť $y \in \mathbb{Z}$, čím získame, že

$$p(x_2) - p(x_1) = y(x_2 - x_1).$$

Toto dosaďme do vyjadrenia vzdialenosti zvolených bodov grafu.

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + y^2(x_2 - x_1)^2$$

Keďže uvažujeme dva rôzne body funkcie, tak $x_1 \neq x_2$ a môžeme rovnicu vydeliť výrazom $(x_2 - x_1)^2$.

$$\frac{|AB|^2}{(x_2 - x_1)^2} = 1 + y^2$$
$$\left(\frac{|AB|}{x_2 - x_1}\right)^2 = 1 + y^2$$

Vieme, že y je celé číslo, takže pravá strana rovnice je celá, tým pádom musí byť celá aj ľavá strana. Na ľavej strane je racionálne číslo umocnené na druhú. Čitateľ a menovateľ racionálneho čísla v základnom tvare sú nesúdeliteľné a budú nesúdeliteľné aj, keď ich umocníme. Takže aby bolo racionálne číslo celé po umocnení, musí byť celé aj pred umocnením. Preto môžeme označiť $|AB|/(x_2 - x_1)$ z, kde z je celé číslo. Potom

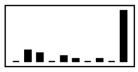
$$\begin{aligned} z^2 &= 1 + y^2, \\ z^2 - y^2 &= 1, \\ (z + y)(z - y) &= 1. \end{aligned}$$

Táto rovnica má v celých číslach dve riešenia, pre ktoré $z + y = z - y = \pm 1$. V oboch prípadoch $y = 0$. Keďže $p(x_2) - p(x_1) = y(x_2 - x_1)$ a $y = 0$, tak $p(x_2) - p(x_1) = 0$, čiže $p(x_1) = p(x_2)$. A nakoľko $p(x_1)$ a $p(x_2)$ vyjadrujú y-súradnice zvolených bodov, ich rovnosť znamená, že úsečka, ktorá body spája, je rovnobežná s osou x, čo bolo treba dokázať.

Komentár

Na princíp úlohy a to, ako si prehľadne označiť súradnice dvoch bodov a vyjadriť ich vzdialenosť pomocou jednoduchej Pytagorovej vety, a následne, ako do výrazu dosadiť polynómy, väčšina z vás prišla, čo nás veľmi teší, že vás tento typ úloh neodrádza. (: No niektorí sa trošku zamotali ku koncu úlohy do úvah o celočíselnosti. Je potrebné si dať pozor na to, že ak vieme, že súčin je celé číslo, tak nemôžeme automaticky bez nejakého ďalšieho vysvetlenia prehlásiť, že aj oba činitele sú celočíselné.

3. Opravovali: **Dano Onduš a Erik Novák**
Počet riešení: 29 Najkrajšie riešenie: **Richard Vodička**



Nájdite všetky dvojice prvočísel (p, q), pre ktoré $p^3 - q^5 = (p + q)^2$.

Riešenie

Najprv si rozoberme prípady podľa zvyšku p a q po delení 3, kde ani jedno z nich nie je deliteľné troma. Značenie $a \equiv b \pmod{n}$ znamená, že a a b dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom n. Kongruencie, ako tieto rovnosti nazývame, sa dajú upravovať podobne ako obyčajné rovnice, ale stačí počítať so zvyškami, takže napríklad $4^3 - 5^2 \equiv 1^3 - 2^2 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$. Viac o kongruenciách si môžeš prečítať napríklad tu. V našom riešení využijeme, že keďže $p^3 - q^5 = (p + q)^2$, tak nutne majú aj rovnaký zvyšok, čiže $p^3 - q^5 \equiv (p + q)^2 \pmod{3}$.

- $p \equiv 1$ a $q \equiv 1 \pmod{3}$: Po dosadení do rovnosti $1^3 - 1^5 \equiv (1 + 1)^2 \pmod{3}$, teda $0 \equiv 1 \pmod{3}$, čo neplatí.
- $p \equiv 1$ a $q \equiv 2 \pmod{3}$: Po dosadení do rovnosti $1^3 - 2^5 \equiv (1 + 2)^2 \pmod{3}$, teda $2 \equiv 0 \pmod{3}$, čo neplatí.
- $p \equiv 2$ a $q \equiv 1 \pmod{3}$: Po dosadení do rovnosti $2^3 - 1^5 \equiv (2 + 1)^2 \pmod{3}$, teda $1 \equiv 0 \pmod{3}$, čo neplatí.
- $p \equiv 2$ a $q \equiv 2 \pmod{3}$: Po dosadení do rovnosti $2^3 - 2^5 \equiv (2 + 2)^2 \pmod{3}$, teda $0 \equiv 1 \pmod{3}$, čo neplatí.

Zistili sme, že aspoň jedno z prvočísel p a q musí byť deliteľné 3, a jediné také prvočíslo je 3. Ďalej si uvedomme, že na pravej strane rovnice máme štvorec, teda kladné celé číslo, čiže aj ľavá strana je kladná. Z toho zjavne $p > q$, a preto je práve jedno z p, q rovné 3. Rozoberme oba prípady.

- $p = 3$. Potom keďže $p > q$, $q = 2$, čo po dosadení ľahko overíme, že nevychádza.
- $q = 3$. Dosadíme a rovnicu $p^3 - 3^5 = (p + 3)^2$ upravíme do tvaru $p^3 - p^2 - 6p = 252$. Ľavú stranu delí p, takže aj pravú stranu musí deliť p. Prvočíselné delitele 252 sú 2, 3, 7 a z toho, že $p > q = 3$, vyplýva, že $p = 7$. Nakoniec overíme, že $7^3 - 3^5 = (7 + 3)^2$, čo naozaj platí, lebo $343 - 243 = 100$.

Dokázali sme, že jedinou platnou možnosťou je $(p, q) = (7, 3)$.

Komentár

Viacerí z vás úlohu vyriešili alternatívnou cestou cez pozorovanie, že q delí $p - 1$ a zároveň p delí $q^3 + 1$. Samozrejme, ak bola dostatočne vysvetlená, nemali sme dôvod strhávať akékoľvek body, pripadá nám však, že táto cesta bola mnohonásobne zložitejšia na popísanie a vysvetlenie ako cesta vo vzorovom riešení. Preto vám chceme poradiť, aby vždy, keď vidíte podobnú úlohu, ste si na začiatku overili zvyšky premenných po delení aspoň pár malými prvočíslami, pretože často objavíte nejakú zaujímavú vlastnosť, ktorá vám pomôže dôjsť k riešeniu.

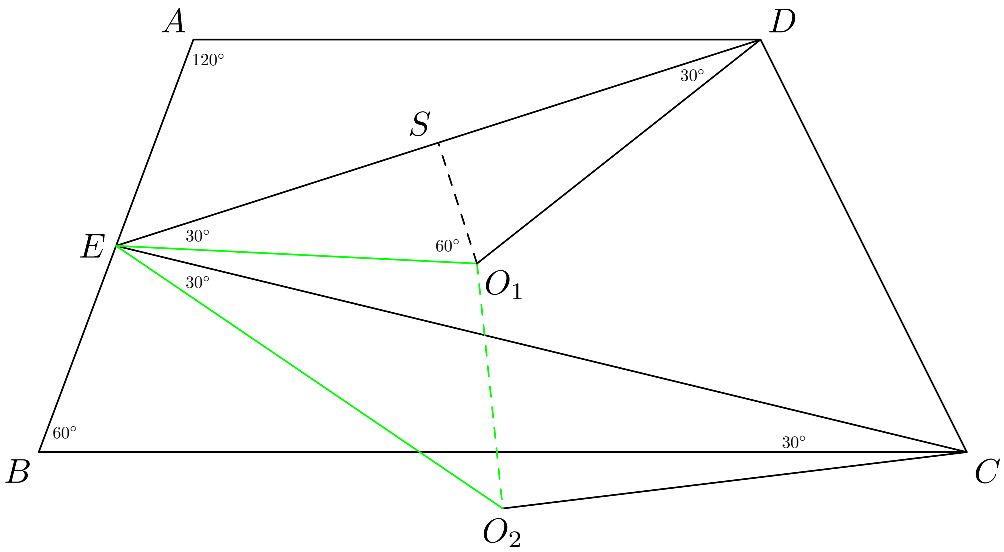
4. Opravovali: **Timea Szöllősová a Michal Masrna**

Počet riešení: 13 Najkrajšie riešenie: **Veronika Vodičková**

Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AD a BC s uhlom veľkosti 120° pri vrchole A. Nech E je stred strany AB. Označme O_1 a O_2 postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom AED a BEC. Dokážte, že obsah lichobežníka $ABCD$ je 6-krát väčší ako obsah trojuholníka EO_1O_2.

Riešenie

Pozrime sa na uhly v trojuholníkoch O_1DE a O_2CE. V oboch prípadoch ide o rovnoramenné trojuholníky so stredovými uhlami oproti základniam, keďže O_1 a O_2 sú stredy príslušných opísaných kružníc. Obvodový uhol DAE pod tetivou DE má 120° a my vieme, že súčet uhlov nad tetivou a pod ňou je vždy 180°, takže obvodový uhol nad touto tetivou bude 60°.



Vďaka rovnobežnosti AD a BC má uhol ABC veľkosť $180° - 120° = 60°$. Uhol EBC je zároveň obvodový uhol nad tetivou CE. Tým pádom obvodové uhly k tetivám DE a CE v príslušných kružniciach sú 60°, čiže stredové uhly budú taktiež totožné – 120°. Z toho dostávame, že naše trojuholníky O_1DE a O_2CE majú rovnaké všetky uhly, a teda sú podobné. Zjavne potom $\frac{|DE|}{|EO_1|} = \frac{|CE|}{|EO_2|}$.

Vezmime si teraz uhly DEC a O_1EO_2. Všimnime si, že v časti sa prekrývajú a tam, kde sa neprekrývajú, majú navyše oba 30°. Z toho vyplýva, že oba uhly sa rovnajú. Vďaka tomu a pomerom, ktoré sme získali vyššie, vieme vďaka vete sus povedať, že trojuholníky DEC a O_1EO_2 sú podobné.

Aký je však koeficient podobnosti? Označme S stred DE, ktorý bude zároveň pätou kolmice z O_1 na túto úsečku, keďže máme rovnoramenný trojuholník. Úsečka O_1S nám potom rozdelí trojuholník O_1DE na dva zhodné trojuholníky s uhlami 30°, 60°, 90°. Pozorný riešiteľ si môže všimnúť, že jeden takýto trojuholníček je vlastne polovica rovnostranného trojuholníka rozdeleného jeho výškou. Pomer strany rovnostranného trojuholníka a jeho výšky je $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (túto úvahu vieme nahradiť Pytagorovou vetou). Takto pomer strany EO_1 k celej úsečke ED bude $2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Keď sa teraz pozrieme na pomer obsahov týchto trojuholníkov, tak to bude $\sqrt{3}^2 = 3$, inak povedané obsah O_1EO_2 bude tretinou obsahu DEC.

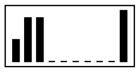
Na záver už stačí zistiť, akú časť obsahu lichobežníka $ABCD$ tvorí trojuholník DEC. Označme výšku lichobežníka v. Keďže bod E je v strede ramena AB, výšky trojuholníkov DAE aj BCE budú $\frac{v}{2}$. Potom $S_{DEC} = S_{ABCD} - S_{DAE} - S_{BCE} = \frac{(|BC|+|AD|)v}{2} - \frac{|AD|v}{2\cdot 2} - \frac{|BC|v}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}(\frac{(|BC|+|AD|)v}{2}) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Tým pádom obsah O_1EO_2 je $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ obsahu $ABCD$.

Komentár

V tejto úlohe ste sa zväčša vybrali analytickou alebo goniometrickou cestou, čo nás celkom mrzelo, keďže sa táto úloha dala pekne vyriešiť iba s Pytagorovou vetou. Výpočtová cesta samozrejme nemusí byť nutne zlá, ale výhoda syntetickej („klasickej“) geometrie spočíva hlavne v menšej šanci urobiť „hlúpu aritmetickú chybu“ (a okrem toho počítania si užijete dosť pri ostatných typoch úloh :P).

Celkovo ste nás potešili, že ste sa tejto zdanlivo neuchopiteľnej úlohy nezľakli a poväčšine ste sa dopracovali k správnemu riešeniu alebo aspoň k jeho časti :)

5. Opravovali: **Maťo Gbúr a Mimi Hanus**
Počet riešení: 22 Najkrajšie riešenie: **Michal Pecho**



Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$f(x - y + f(y)) = f(x) + f(y).$$

Riešenie

Úlohu riešme dosadzovaním hodnôt a výrazov za x a y do danej funkcionálnej rovnice. Z dosadenia celého čísla x za y plynie, že pre všetky celé x

$$\begin{aligned} f(x - x + f(x)) &= f(x) + f(x), \\ f(f(x)) &= 2f(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Z dosadenia $(x + 1, 1)$ za (x, y) pre všetky x

$$\begin{aligned} f(x + 1 - 1 + f(1)) &= f(x + 1) + f(1), \\ f(x + f(1)) &= f(x + 1) + f(1). \end{aligned} \tag{2}$$

Do tretice z dosadenia $(x, f(1))$ za (x, y) pre všetky x

$$f(x - f(1) + f(f(1))) = f(x) + f(f(1)).$$

Podľa (1) $f(f(1)) = 2f(1)$, teda

$$\begin{aligned} f(x - f(1) + 2f(1)) &= f(x) + 2f(1), \\ f(x + f(1)) &= f(x) + 2f(1). \end{aligned} \tag{3}$$

Teraz pre každé celé číslo x platia (2) aj (3), odkiaľ porovnaním vďaka rovnosti ľavých strán pre každé x

$$\begin{aligned} f(x + 1) + f(1) &= f(x) + 2f(1), \\ f(x + 1) - f(x) &= f(1). \end{aligned} \tag{4}$$

Z tohto zreteľne $(f(n))_{n=0}^{\infty}$ je aritmetická postupnosť s diferenciou $f(1)$ a podobne aj opačným smerom je $(f(-n))_{n=0}^{\infty}$ aritmetická postupnosť s diferenciou $-f(1)$. Keď dosadíme 0 za x do (4), dostaneme, že $f(1) - f(0) = f(1)$, z čoho plynie $f(0) = 0$, a preto $f(x) = f(1)x$. (Na túto úvahu sa dá pozerať aj ako na argument indukciou podľa parametra x od nuly obomi smermi.)

Dosaďme teraz za f do pôvodnej rovnice funkciu danú týmto lineárnym predpisom.

$$\begin{aligned} f(1)(x - y + f(1)y) &= f(1)x + f(1)y \\ f(1)(x - y + f(1)y - x - y) &= 0 \\ f(1)y(f(1) - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Pre $y = 1$ sú koreňmi tejto kvadratickej rovnice v neznámej $f(1)$ zjavne len 0 a 2. Zároveň pre každú z týchto dvoch hodnôt $f(1)$ je rovnica splnená pre všetky hodnoty y. Keďže úprava rovnice bola ekvivalentná, skúška správnosti už bola vykonaná a zadanej rovnici vyhovujú práve dve funkcie: $x \mapsto 0$ a $x \mapsto 2x$.

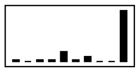
Komentár

Bohužiaľ, mnohí z vás túto úlohu nedoriešili do konca. Niektorí našli len konštantné riešenie a vyskúšali, že funguje, iní našli len $f(x) = 2x$ a ukázali, že funguje, ďalší našli obe, no na skutočné vyriešenie úlohy je treba dokázať, že sú to naozaj jediné riešenia. Tým z vás, ktorým sa to podarilo, sme udelili plný počet bodov a prekvapili ste nás rôznymi originálnymi prístupmi, čo nás veľmi teší.

Za zmienku stojí riešenie vyšetrovaním núl funkcie f – akonáhle $f(x) = 0$ pre nejaké nenulové x, f musí byť periodická s periódou x. Periodická funkcia na celých číslach má konečný obor hodnôt, no my vieme, že $f(f(x)) = 2f(x)$, čo na druhej strane znamená, že obor hodnôt je nekonečný, ak obsahuje nenulovú hodnotu, čo nás dostáva k sporu. Z toho následne vyplynú dve riešenia úlohy.

6.

Opravovali: **Martin Masrna a Ján Richnavský**
Počet riešení: 44 Najkrajšie riešenie: **Richard Vodička**



Kubo hrá hru, v ktorej si na začiatku zapíše ľubovoľné kladné celé číslo n. V každom ťahu môže svoje aktuálne číslo nahradiť novým podľa nasledujúceho pravidla: ak má zapísané číslo $a + b$, kde a aj b sú kladné celé čísla, potom môže toto číslo nahradiť číslom $a \cdot b$. Predpokladajme, že Kubo začína s kladným celým číslom $n \geq 5$, a majme dané kladné celé číslo m. Ukážte, že existuje postupnosť krokov, ktoré povedú k tomu, že Kubo bude mať zapísané číslo m.

Riešenie

Ľubovoľné kladné celé $k \geq 2$ vieme rozdeliť na dve kladné celé čísla 1 a $k - 1$, ktorých súčin je $k - 1$. Z toho vyplýva, že akékoľvek $k \geq 2$ vieme zmenšiť o 1. Takéto zmenšenie, ktorým z k dostaneme $k - 1$, nazvime prvým krokom.

Ľubovoľné kladné celé $k \geq 3$ vieme rozdeliť na dve kladné celé čísla 2 a $k - 2$, ktorých súčin bude $2k - 4$. Nech $k \geq 5$, po úprave $2k \geq k + 5$, resp. $2k - 4 \geq k + 1$, z čoho je zjavné, že pre $k \geq 5$ bude $2k - 4$ vždy väčšie ako k. Takto vieme $k \geq 5$ neobmedzene určite zväčšovať. Zväčšenie, ktorým z $k \geq 5$ dostaneme $2k - 4$, nazvime druhým krokom.

Ak $n < m$, n vieme zväčšovať druhým krokom (zväčšovať ho určite vieme, keďže zo zadania $n \geq 5$), až kým neplatí $n \geq m$. Ak $n = m$, sme hotoví. Ak $n > m$, prvým krokom vieme číslo zmenšovať, až kým neplatí $n = m$.

Komentár

Táto úloha má mnoho riešení, ktoré boli až na výnimky veľmi kvalitné a dotiahnuté do zdarného konca. Niektorí riešitelia nám nedostatočne odôvodnili, že n bude pri druhom kroku (alebo podobnom spôsobe) vždy stúpať, za čo sme, patrične, museli stiahnuť body.

Očiam väčšiny riešiteľov neuniklo, že na pozícii poslednej úlohy série sa nenachádzala úloha takej obtiažnosti, ktorú by tam mnohí čakali. Nech je všetkým riešiteľom ponaučením, že číslo úlohy nedeterminuje jej obtiažnosť, a preto sa patrí každú úlohu v každej sérii aspoň prečítať a oplatí sa nad každou popremýšľať.

Zadania úloh letného semestra 46. ročníka

Nezabudni si vytvoriť či aktualizovať profil na `seminar.strom.sk`.

2 Druhá séria

Termín odovzdania riešení: **9. mája 2022**

Ak nevieš pohnúť ďalej s niektorou z úloh, skús sa pozrieť na pár tipov, ktoré nájdeš na našej webovej stránke `seminar.strom.sk/media/uploads/mohlobysahodit.pdf`.

1. Cifry prirodzeného čísla sme preusporiadali a číslo, ktoré vzniklo, sme pripočítali k pôvodnému.

a) Dokážte, že sme nemohli dostať ako výsledok číslo pozostávajúce z 999 deviatok.

b) Dokážte, že ak nám vyšiel výsledok 10^{10}, tak pôvodné číslo bolo deliteľné desiatimi.

2. Majme funkciu f definovanú na nezáporných celých číslach s hodnotami v množine celých čísel spĺňajúcu:

$$f(n) = \begin{cases} -f\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{ak } n \text{ je párne,} \\ f(n-1)+1 & \text{ak } n \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

Nájdite najmenšie nezáporné celé číslo n, pre ktoré je $f(n) = 2022$.

3. Kladné celé číslo n zafarbíme načerveno, ak ho vieme zapísať ako $n = a_1 + a_2 + ... + a_k$, kde k a všetky a_i sú kladné celé čísla a $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = 1$. Ak viete, že všetky čísla od 33 po 73 sú zafarbené načerveno, dokážte, že aj všetky čísla väčšie ako 73 už musia byť červené.

4. V rovine máme konvexný $3n-1$ uholník, kde $n \geq 2$ je kladné celé číslo. Každú úsečku medzi dvoma jeho bodmi zafarbíme buď namodro, alebo načerveno. Ukážte, že existuje n disjunktných (nemôžu zdieľať žiaden bod) modrých alebo červených úsečiek.

5. Je daný pravý uhol AMB. Zostrojte rovnostranný trojuholník KLM tak, aby vzdialenosť K od priamky MA bola dvakrát väčšia ako vzdialenosť L od priamky BM. Svoju konštrukciu popíšte a zdôvodnite jej korektnosť.

K tejto úlohe pribudne na našej stránke 11. mája nápoveda.

6. Nájdite všetky nepárne kladné celé čísla m, pre ktoré postupnosť a_k, $k = 0, 1, \ldots$, definovaná predpisom $a_0 = \frac{1}{2}(2m+1)$ a $a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor$ pre $k \geq 0$, obsahuje aspoň jedno celé číslo.

K tejto úlohe pribudne na našej stránke 11. mája nápoveda.

Poradie po 1. sérii letného semestra 46. ročníka

Poradie	Meno a priezvisko	Ročník	Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	H	CS
1. - 5.	Lucia Chladná	S1	GAMČABA	9	9	9	9	9	9	0	54
	Veronika Chovancová	S3	PiarGTN	9	9	9	9	9	9	0	54
	Martin Kopčány	S3	GJChaBR	9	9	9	9	9	9	0	54
	Dominik Rigasz	S1	GJHN3BA	9	9	9	5	9	9	0	54
	Simon Omaník	S1	GAMČABA	9	9	9	9	9	9	0	54
6.	Adam Džavoronok	S3	GPoštKE	9	7	9	9	9	9	0	52
7.	Michal Pecho	S4	SDubn	9	9	9	-	9	9	0	45
8.	Richard Vodička	S1	GAlejKE	9	7	9	-	-	9	0	43
9.	Ondrej Králik	S1	GAlejKE	9	7	5	-	2	9	0	41
10.	Anna Podmanická	S1	GVaršZA	9	7	2	9	2	4	0	40
11. - 13.	Karin Eštoková	S3	GMRŠKE	9	9	9	-	-	9	0	36
	Michal Almáši	S3	GPM	9	7	9	1	1	9	0	36
	Alica Cimráková	S1	BGMHSuč	9	7	-	-	2	9	0	36
14. - 15.	Michal Iľkovič	S1	GSMTŠPO	9	7	-	-	1	9	0	35
	Matúš Libák	Z9	GAlejKE	9	-	-	8	-	9	0	35
16.	Natália Čigašová	S3	GPoštKE	8	7	9	-	-	9	0	33
17.	Vladimír Jančár	S3	GPH	9	3	9	-	2	9	0	32
18. - 19.	Marek Horváth	S1	GKonšPO	9	-	2	-	2	9	0	31
	Veronika Vodičková	S1	GAlejKE	9	-	-	9	-	4	0	31
20.	Martin Šmilňák	S2	GAlejKE	9	-	9	-	1	9	0	29
21. - 22.	Oskar Hritz	S3	GPoštKE	8	-	9	-	2	9	0	28
	Tomáš Kubrický	S1	GPoštKE	9	9	-	-	1	-	0	28
23. - 30.	Katarína Farbulová	S1	GPoštKE	9	-	9	-	-	-	0	27
	Natália Poliačiková	S1	GPoštKE	9	-	-	-	-	9	0	27
	Bianka Gurská	S2	GPoštKE	9	-	9	-	-	9	0	27
	Adela Horváthová	S2	GPoštKE	9	-	9	-	-	9	0	27
	Martin Dudjak	S1	SMládPP	9	-	-	-	-	9	0	27
	Oliver Seman	Z9	GAlejKE	9	-	-	-	0	9	0	27
	Maxima Anna Alžbeta Bednarčíková	S1	GAlejKE	9	-	-	-	-	9	0	27
	Viera Glevitzká	S3	GVBNPD	9	-	9	9	-	-	0	27
31.	Lucia Kleščová	S1	GPoštKE	8	-	7	-	0	-	0	22
32. - 33.	Branislav Ječim	S2	GŠkolSN	9	-	1	-	-	9	0	19
	Andrej Znamenáček	S1	GAMČABA	9	-	-	-	-	5	0	19
34. - 35.	Ľubomír Vargovčík	S3	GPoštKE	9	-	-	-	-	9	0	18
	Katarína Gersová	S1	GJHN3BA	4	-	-	-	1	9	0	18
36. - 38.	Miriam Horváthová	S2	GŠtúrMI	8	-	-	-	-	9	0	17
	Oskar Cacara	Z9	ZKro4KE	9	-	-	-	-	4	0	17
	Tomáš Jakubec	S1	TAkadSN	9	-	-	-	-	4	0	17
39. - 40.	Terézia Stanová	S2	EGJAKKE	9	-	4	-	-	3	0	16
	Lukáš Lučanský	S4	gymtv	9	4	1	2	-	-	0	16
41. - 42.	Jakub Kulka	S3	GMRŠKE	-	9	-	-	-	6	0	15
	Štefan Vašak	S3	GPoštKE	6	-	-	-	-	9	0	15
43. - 45.	Natália Tkáčová	Z9	ZLevoSN	4	-	-	-	-	6	0	14
	Erik Jochman	S1	GAlejKE	6	-	-	-	-	4	0	14
	Viliam Geffert	S3	GPoštKE	8	-	-	-	-	6	0	14
46.	Martin Janček	S3	SMládPP	4	-	-	-	-	9	0	13
47.	Lujza Lea Lavriková	S1	GPH	4	-	-	-	-	4	0	12
48. - 51.	Matej Válek	Z9	ZKro4KE	9	-	-	-	-	-	0	9
	Miriam Halasová	S2	GSMTŠPO	5	0	4	-	-	-	0	9
	Ladislav Jakab	S2	soskn	7	0	2	0	0	0	0	9
	Ladislav Antoži	S2	GAlejKE	9	-	-	-	-	-	0	9
52.	František Bublák	Z7	GABerSC	8	-	-	-	-	-	0	8
53.	Lenka Grmanová	S2	GAEinBA	3	1	1	-	1	-	0	7
54.	Juraj Kramár	S1	GAlejKE	2	-	-	-	-	2	0	6
55.	Miroslava Pokorná	S2	GAMČABA	2	-	-	-	-	-	0	2
56.	Linda Mičicová	Z9	GMMH9LM	-	-	1	-	-	-	0	1

Názov: Strom – korešpondenčný matematický seminár
Číslo 5 • Máj 2022 • Letný semester 46. ročníka (2021/2022)
Web: `seminar.strom.sk`
E-mail: `strom@strom.sk`
Riešenia: Prijímame odovzdaním na webe a v prípade poruchy stránky na adrese `riesenia.strom@strom.sk`.

Vydáva: Združenie Strom, Jesenná 5, 041 54 Košice
Web: `zdruzenie.strom.sk`
E-mail: `info@strom.sk`

Organizačný poriadok korešpondenčných matematických seminárov Malynár, Matik, STROM je zaregistrovaný na Ministerstve školstva, vedy, výskumu a športu Slovenskej republiky pod číslom 2017/13750:2-10B0.